

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Е.М. Зубрилина, В.П. Димитров

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебно-методическое пособие

Ростов-на-Дону  
ДГТУ  
2021

УДК 001.891

**Зубрилина, Елена Михайловна.**

Основы теории эксперимента: учеб.-метод. пособие /  
Е.М. Зубрилина, В.П. Димитров ; Донской гос. техн. ун-т. –  
Ростов-на-Дону: ООО «ДГТУ-Принт», 2021. – 174 с.

Рассмотрены вопросы организации, планирования и обработки результатов экспериментов. Изложены основы теории эксперимента. Представленные материалы отличаются простотой и наглядностью, приводятся много примеров из области планирования экспериментов в исследованиях сельскохозяйственных процессов.

Предназначено для специалистов, бакалавров и магистрантов, изучающих дисциплину «Основы научных исследований», «Основы научных исследований в отрасли», «Основы научных исследований в АПК». Пособие может быть полезным также аспирантам и научным сотрудникам, которые занимаются планированием экспериментальных исследований сложных, многофакторных систем.

УДК 001.891

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Донского государственного технического университета

Научный редактор  
кандидат физико-математических наук, доцент И.Н. Нурутдинова

© Зубрилина Е.М., Димитров В.П.  
© ДГТУ, 2021

# 1. ЭКСПЕРИМЕНТ КАК ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### 1.1. Эксперимент как предмет исследования. Виды измерений

*Связь человека с внешним миром.* Информацию об окружающем мире и его свойствах человек получает через органы чувств (зрения, слуха, осязания, обоняния, вкуса и вестибулярный аппарат) и через специальные измерительные приборы (рис. 1.1).



Рис.1.1. Связь человека с внешним миром

Каждый орган чувств включает в себя рецепторы (от латинского слова *recipere* – «получать»), реагирующие на всякое воздействие и проводящие пути, связывающие с центральной нервной системой. Воздействия на рецепторы (физические, химические и т.д.) кодируют различные виды сигналов в единый универсальный частотно-импульсный код. Больше всего информации поступает к нам через зрение (до 80%) и слух (до 18%), а остальная информация – через осязание, обоняние, вкус и вестибулярный аппарат. Поскольку возможности человека очень ограничены, то он стал придумывать, как измерять точнее и как измерить то, что человек измерить вообще не мог. Пришлось придумывать технические средства – приборы. Сначала функции простейшего прибора выполнял человек. Шагами измерялось расстояние, длина и ширина – ладонями, саженьями, локтями и т.д. Но с появлением измерительных приборов в измерительной процедуре стал участвовать как человек, так и техническое средство – *измерительный прибор*.

Общий алгоритм познания объекта представлен на рис. 1.2, который включает в себя наблюдения и эксперимент с целью формирования гипотез и их проверок.

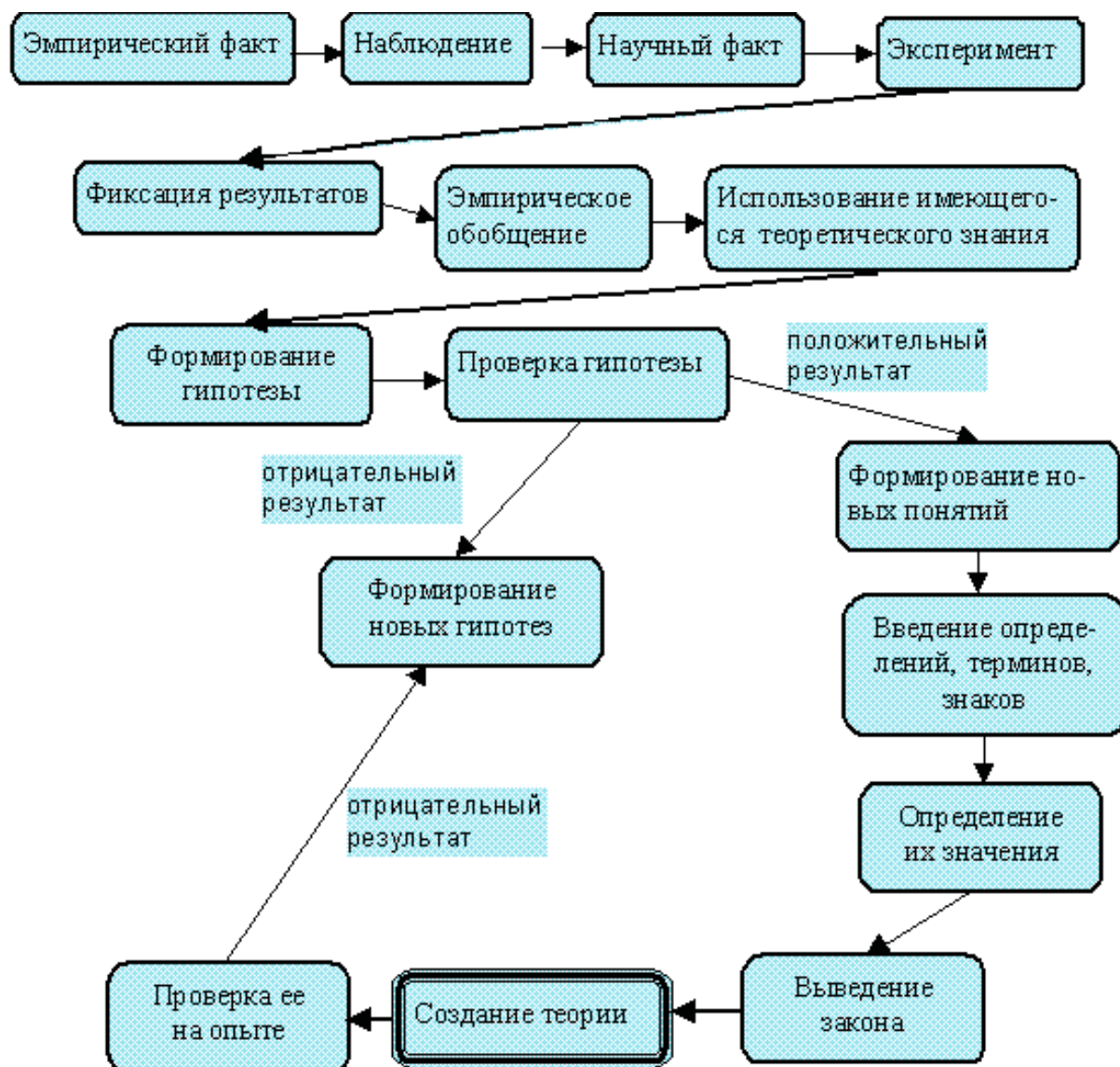


Рис. 1.2. Общий алгоритм познания объекта

Методы научных исследований делятся на эмпирические и теоретические (рис. 1.3). К эмпирическим относятся: наблюдение, описание, измерение, эксперимент, сравнение. К теоретическим методам относятся: формализация, аксиоматизация и гипотетико-дедуктивный метод.

*Наблюдение* – регистрация различных факторов естественного или искусственного происхождения.

Наблюдение является основой всех научных исследований. Признаки наблюдаемого объекта, выявляемые при наблюдении, могут быть как качественными, так и количественными. Количественные признаки выявляются, как правило, путём измерения. Наблюдение можно рассматривать как совокупность измерений, произведённых над наблюдаемым объектом в один момент времени. В большинстве случаев под наблюдением и измерением понимают один и тот же процесс; под наблюдением следует понимать сложный вид измерений.

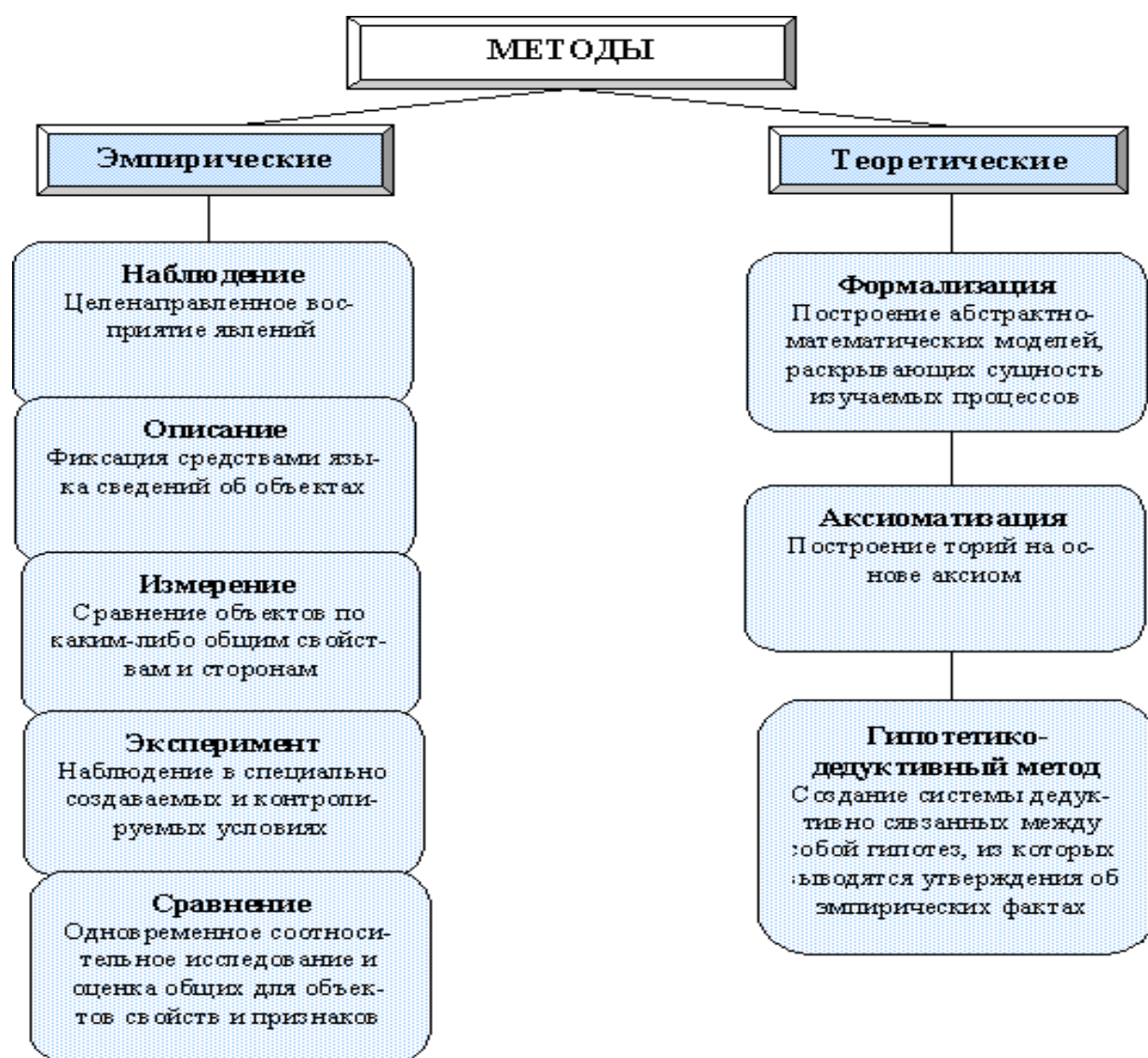


Рис. 1.3. Методы научных исследований

*Эксперимент* (от лат. experimentum – проба, опыт) – метод познания, при помощи которого в контролируемых и управляемых условиях исследуются явления действительности.

Эксперимент осуществляется на основе теории, определяющей постановку задач и интерпретацию его результатов. Нередко главной задачей эксперимента служит проверка гипотез и предсказаний теории, имеющих принципиальное значение (так называемый решающий эксперимент).

*Технический эксперимент* – натурный эксперимент, связанный с исследованием качественных и (или) количественных характеристик некоторого технического устройства.

*Технологический эксперимент* – эксперимент, в большинстве случаев основной целью которого является разработка новой или улучшение имеющейся технологии, т.е. технологическая эволюция.

*Измерительный эксперимент.*

*Измерение* – это единственный источник информации о свойствах объектов, процессов и явлений.

*Измерение* – процесс, заключающийся в определении значения физической величины с помощью специальных технических средств, имеющих нормированные метрологические свойства.

Простейший измерительный эксперимент может быть представлен в виде системы, содержащей минимум три звена: объект, одно из свойств которого определяется; измерительный прибор, преобразующий сигнал, несущий информацию о данном свойстве объекта к виду, удобному для восприятия органами чувств человека (через зрение); человек (оператор), формирующий результат измерения (рис. 1.4).



Рис. 1.4. Простейшая схема измерительного эксперимента

Результаты измерения используются при решении производственных, научных, социальных, экологических и других задач.

Независимо от цели проведения и конечного результата измерительный эксперимент состоит из *трех этапов*:

- подготовка к измерениям;
- выполнение измерений;
- обработка результатов измерений.

*Подготовка к измерениям* включает:

- анализ поставленной задачи;
- создание условий для измерений;



- выбор средств и методов измерений;
- выбор числа измерений;
- подготовка специалиста (оператора);
- опробование средств измерений.

Модель объекта, параметры которой подлежат измерению, необходимо выбрать до начала.

Выбранная модель должна удовлетворять двум требованиям:

- соответствовать реальному объекту;
- измеряемые параметры должны быть стабильны в течение всего времени измерения.

Влияющие величины подразделяются на следующие группы:

- климатические (температура окружающей среды, относительная влажность, атмосферное давление);
- электрические и магнитные (колебания электрического тока, напряжение в электрической сети, частота переменного тока, магнитное поле и др.);
- внешние нагрузки (вибрации, ударные нагрузки, касания деталей приборов, ионизирующее излучение, газовый состав атмосферы и т.д.).

Для конкретных областей измерений устанавливают единые условия, называемые нормальными. Значение влияющей величины, соответствующее нормальным условиям, называют номинальным значением влияющей величины (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Номинальные значения влияющих величин

Влияющая величина	Номинальное значение
1	2
1. Температура для всех видов измерений	20 °С (293 К)
2. Давление окружающего воздуха для измерения ионизирующих излучений, теплофизических, температурных, магнитных, электрических измерений, измерения давлений и параметров движения	100 кПа (750 мм. рт. ст.)
3. Давление воздуха для линейных, угловых измерений, измерений массы, силы света, измерений в спектроскопии и других областях, кроме указанных в п.2	101,3 кПа (760 мм. рт. ст.)
5. Относительная влажность воздуха для измерений электрического сопротивления	55%
6. Относительная влажность воздуха для измерений температуры, силы, твердости, переменного электрического тока, ионизирующих излучений, параметров движения	65%
7. Относительная влажность воздуха для всех видов измерений, кроме указанных в п.п. 4,5,6	60%
8. Плотность воздуха	1,2 кг/м <sup>3</sup>

1	2
9. Ускорение свободного падения	9,8 м/с <sup>2</sup>
10. Магнитная индукция (напряженность магнитного поля) и напряженность электростатического поля для измерения параметров движения, магнитных и электрических величин	0
11. Магнитная индукция (напряженность магнитного поля) и напряженность электростатического поля для всех видов измерений, кроме указанных в п.10	Соответствует характеристикам поля Земли в данном географическом районе

При точных измерениях для поддержания нормальных условий применяют средства защиты от воздействия влияющих причин.

Классификация видов измерений представлена на рис. 1.5.

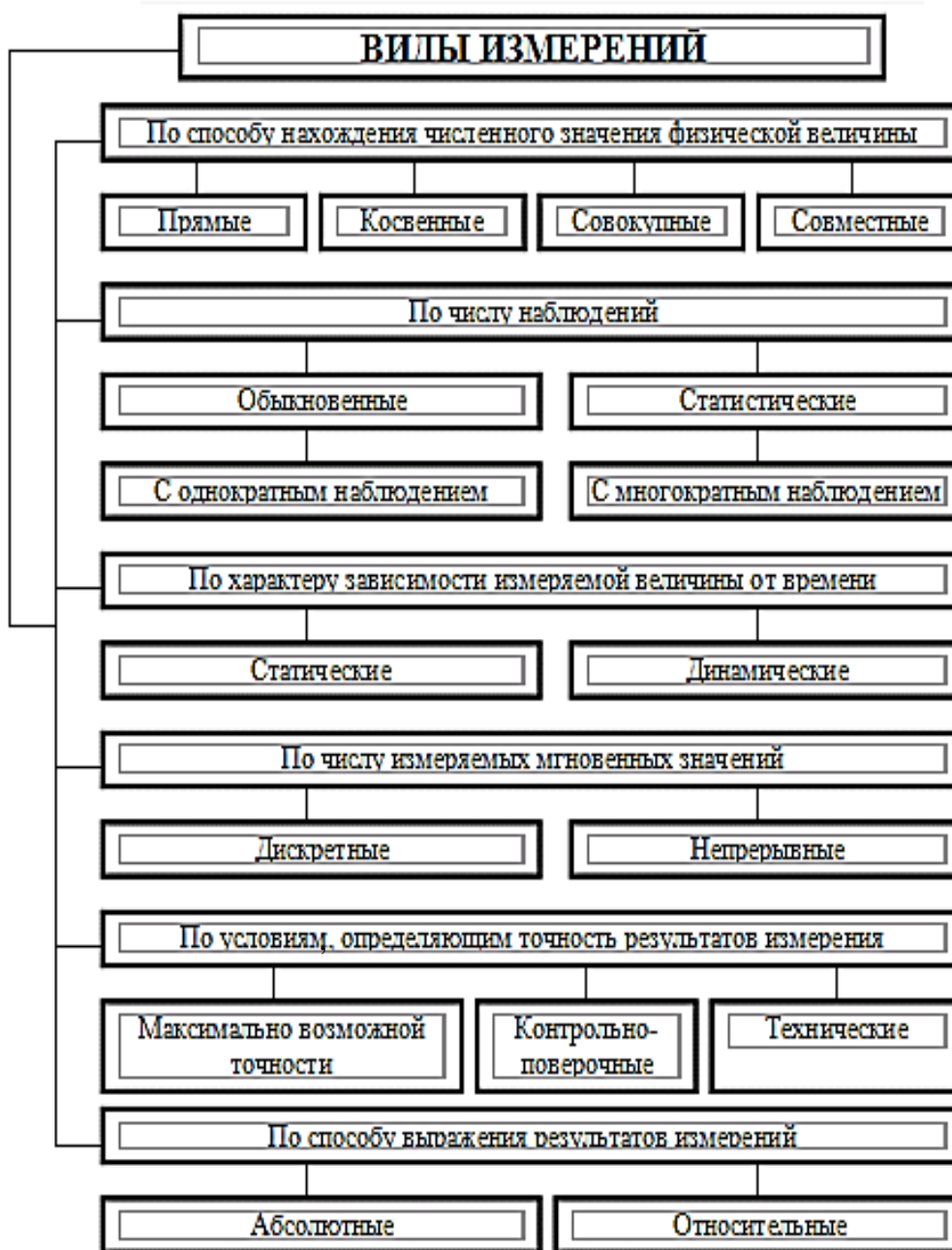


Рис. 1.5. Классификация видов измерений



При планировании измерений необходимо выбрать измерительную аппаратуру, рациональные методы и способы измерения, обеспечивающие требуемую точность. Необходимо определить точность результата эксперимента и, учитывая погрешности, определить точность измерений.

*Погрешности измерений.* Погрешности бывают *грубые, систематические* и *случайные*. Они зависят от совокупности различных причин: несовершенства методов измерений, несовершенства средств измерений, неточности используемых мер, низкой квалификации технического персонала (рис. 1.6).

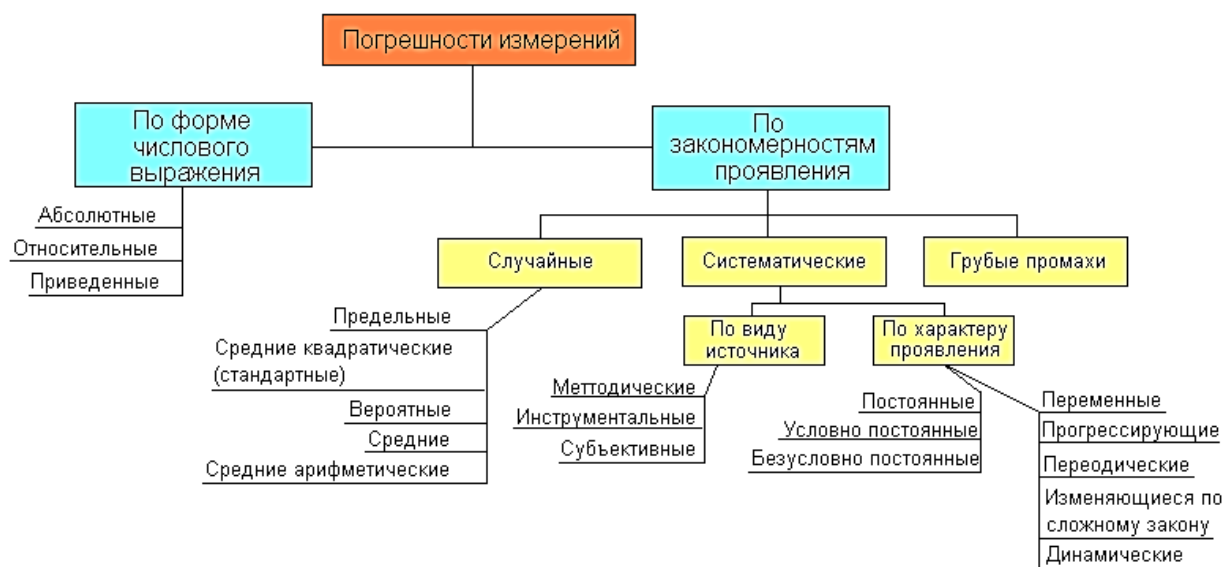


Рис. 1.6. Классификация погрешностей измерения

*Абсолютная погрешность* – погрешность, выраженная в единицах измеряемой величины, определяется формулой

$$\Delta x = x - x_0, \quad (1.1)$$

где  $x$  – значение измеряемой величины, полученной при измерении;  
 $x_0$  – истинное значение измеряемой величины.

*Относительная погрешность* – это отношение абсолютной погрешности измерения  $\Delta x$  к истинному (действительному) значению  $x_0$  измеряемой величины или принятому опорному значению (ГОСТ Р ИСО 5725-2002):

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x_o}. \quad (1.2)$$

Абсолютная погрешность  $\Delta x$  измеряется в тех же единицах, что и измеряемая величина  $x$ .

Относительная погрешность является безразмерной величиной и обычно выражается в процентах. Она приблизительно характеризует качество измерений независимо от значения измеряемой величины. Относительная погрешность в 10% или около того характеризует довольно грубые измерения. Относительная погрешность в 1 или 2% является результатом уже довольно точного измерения. Эти оценки погрешностей весьма условны, так как при некоторых простых измерениях без труда можно получить  $\gamma = 0,1 \%$ . С другой стороны, для величин, которые очень трудно измерить, погрешность в 10% рассматривалась бы как приемлемая.

Для оценки точности самих показывающих измерительных приборов служит их приведенная погрешность  $\gamma_{пр}$ , выраженное в процентах отношение абсолютной погрешности показания  $\Delta x$  к  $x_{норм}$  — значению, соответствующему наибольшему показанию шкалы прибора (ГОСТ 13600-68):

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x_{норм}} 100\%. \quad (1.3)$$

Погрешности прибора обуславливаются недостатками самого прибора и внешними влияниями.

Приведённая погрешность, зависящая лишь от самого прибора, называется *основной погрешностью*.

*Планирование измерений.* При планировании измерений задача сводится к нахождению оптимального числа измерений  $n$  набора величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , а затем статистических характеристик:

– *среднего арифметического*:

$$\bar{X} = \bar{X}_n \pm \Delta \bar{X}, \quad (1.4)$$

где  $\bar{X}_n$  — среднее арифметическое выборки;  $\Delta \bar{X}$  — его доверительный интервал;

– среднего квадратичного выборки:

$$S_n \approx \sigma_n (n \rightarrow \infty). \quad (1.5)$$

Доверительный интервал, на величину которого истинное значение  $\bar{X}$  может отличаться от выборочного  $\bar{X}_n$ , определяется по эмпирической формуле

$$\Delta\bar{X} = \frac{S_n \cdot t_{n-1}}{\sqrt{n}}, \quad (1.6)$$

где  $t_{n-1}$  – табличный коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности  $P$  и числа измерений  $n - 1$ .

На практике выбирают доверительную  $P \approx 0,95$  – при погрешности  $\pm 2\sigma$  или  $P = 0,997$  – при погрешности  $\pm 3\sigma$ .

Наименьшее число измерений определяют по формуле

$$n = \left( \frac{S_m \cdot t_{m-1}}{\Delta X} \right)^2 \cdot \left( 1 + \frac{0,5}{m} \pm \frac{2}{\sqrt{m}} \right), \quad (1.7)$$

где  $m$  – число предварительных измерений, заведомо меньшее, чем требуется.

При планировании измерений исходными являются:  $\Delta X$  – максимально допустимое отклонение среднего арифметического;  $P$  – доверительная вероятность;  $m$  – число предварительных измерений.

Измерения, которые необходимо провести для получения ошибки  $\Delta$  с надежностью  $P$ , приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Необходимое число измерений для получения ошибки  $\Delta$   
с надежностью  $P$

$\Delta = \Delta x / \sigma(x)$	Значение $P$					
	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99	0,999
1,0	2	3	5	7	11	17
0,5	3	6	13	18	31	50
0,4	4	8	19	27	46	74
0,3	6	13	32	46	78	130
0,2	13	29	70	100	170	280
0,1	47	110	270	390	700	1100
0,05	180	430	1100	1500	2700	4300
0,01	4500	11000	27000	38000	66000	110000

## 1.2. Основные понятия и определения теории экспериментов.

### Виды экспериментов

*Планирование эксперимента* (experimental design techniques) – математико-статистическая дисциплина, изучающая методы рациональной организации экспериментальных исследований – от оптимального выбора исследуемых факторов и определения собственно плана эксперимента в соответствии с его целью до методов анализа результатов.

*История возникновения планирования эксперимента.* Планирование эксперимента уходит корнями в глубокую древность – примером может служить создание копья, дротика, а затем и лука со стрелами как результата целенаправленной экспериментальной проверки гипотезы о возможности ими убить мамонта.

Планирование эксперимента получило развитие в начале прошлого века после открытия статистических методов.

Вклад в развитие планирования эксперимента внесли на разных этапах разные ученые:

– *Рональд Фишер* (английский статист) в конце двадцатых годов показал целесообразность одновременного варьирования всеми факторами в противовес широко распространенному однофакторному эксперименту. В 1925 году Рональд Фишер изложил фундаментальную работу «Статистические методы для научных сотрудников», которая положила начало математической статистике.

– *Бокс и Уилсон* (в Англии в 1951 г.) предложили оптимизацию процессов в планировании эксперимента – планирование экстремального эксперимента. Идея метода - последовательное достижение области оптимума небольшими сериями опытов при одновременном варьировании по определенным правилам всех факторов.

– С 1960 г. планирование эксперимента начало развиваться в нашей стране под руководством *В. В. Налимова*.

Применение планирования эксперимента делает поведение экспериментатора целенаправленным и организованным, существенно

способствует повышению производительности его труда и надежности полученных результатов.

Большинство научных исследований связано с экспериментом.

*Эксперимент* – научно поставленный опыт с точно учитываемыми и управляемыми условиями.

*Основная характеристика эксперимента* – повторяемость результата при одинаковых условиях.

Условия делятся:

- учитываемые условия (контроль параметров, воздействующих на объект без вмешательства исследователя);
- повторяемые условия (искусственно создаются условия, воздействующие на объект).

В литературных источниках возможно встретить большое количество и различные вариации классификаций видов экспериментов.

Существуют классификационные признаки видов экспериментов.

Эксперименты можно *классифицировать* по следующим признакам.

1. В зависимости от отрасли науки.
2. По способу формирования условий эксперимента: естественные; искусственные.
3. По целям исследования: преобразующие; констатирующие; контролирующие; поисковые; решающие.
4. По организации проведения: лабораторные; натурные: полевые, полигонные и производственные.
5. По структуре изучаемых объектов и явлений: простые; сложные.
6. По характеру внешних воздействий на объект: вещественные; энергетические; информационные.
7. По характеру воздействия средств экспериментальных исследований на объект: модельные; объектные.
8. По типу моделей, используемых в эксперименте: материальные; мыслительные.
9. По контролируемым величинам: пассивные; активные.

10. По количеству варьируемых факторов: однофакторные; многофакторные.

11. По характеру изучаемых объектов и явлений: технологические; социометрические.

*Естественный эксперимент* предполагает проведение опытов в естественных условиях существования объектов исследования (чаще всего используется в биологических, социальных, педагогических и психологических науках).

*Искусственный эксперимент* предполагает формирование искусственных условий для объекта исследования (широко применяется в естественных и технических науках).

*Преобразующий (созидательный) эксперимент* — исследователь активно изменяет структуру и функции объектов исследования в соответствии с выдвинутой гипотезой, а также формирует новые связи и отношения между компонентами объекта или между исследуемым объектом и другими окружающими его объектами. Является разновидностью искусственного эксперимента.

*Констатирующий эксперимент* используется для проверки определенных предположений. Контролирующий эксперимент сводится к контролю результатов внешних воздействий на объект исследования с учетом его состояния, характера воздействия и ожидаемого эффекта.

*Поисковый эксперимент* проводится в том случае, если затруднена классификация факторов, влияющих на изучаемое явление вследствие отсутствия достаточных предварительных (априорных) данных. По результатам поискового эксперимента устанавливается значимость факторов, влияющих на исследуемый объект, осуществляется отсеивание незначимых.

*Решающий эксперимент* ставится для проверки справедливости основных положений фундаментальных теорий в том случае, когда две или несколько гипотез одинаково согласуются со многими явлениями. Целью решающего эксперимента является нахождение факторов, ко-



которые согласуются только с одной гипотезой, а другой (остальным) противоречат.

*Лабораторный эксперимент* проводится в лабораторных условиях с применением типовых приборов, специальных моделирующих установок, стендов, оборудования и т. д. Эксперимент позволяет качественно, с требуемой повторяемостью изучить влияние одних характеристик при варьировании других.

*Натурный эксперимент* проводится в естественных условиях и на реальных объектах.

*Открытый эксперимент* – эксперимент, который открыто объясняет цели и задачи исследования (влияет на результат). Проводится в социальных, психологических, педагогических науках. В качестве объекта исследования выступает человек или группа лиц. Знание объектом исследования того факта, что над ним проводится эксперимент, влияет на результаты исследования.

*Закрытый эксперимент* – эксперимент, в котором объект исследования не догадывается о том, что над ним проводится эксперимент, находится при этом в естественных условиях. Результаты такого эксперимента более достоверны.

*Простой эксперимент* используется для изучения объектов, не имеющих сложной разветвленной структуры, с небольшим количеством взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, выполняющих простейшие функции.

*Сложный эксперимент* применяется для изучения объектов с разветвленной структурой, в которой можно выделить иерархические уровни с большим количеством взаимосвязей внутренних элементов.

*Информационный эксперимент* используется для изучения влияния той или иной информации (различной по форме и содержанию) на объект исследования (чаще всего используется в биологии, психологии, социологии, кибернетике).

*Вещественный эксперимент* предполагает изучение влияния различных вещественных факторов на состояние объекта. Например, влияние различных добавок на качество стали.

*Энергетический эксперимент* используется для изучения воздей-

ствия разных видов энергии (электромагнитной, механической, тепловой) на объект исследования.

*Обычный эксперимент* – экспериментальные средства взаимодействуют с объектом исследования.

*Модельный эксперимент* – объект исследования заменяется его моделью. Недостаток: различие между моделью и реальным объектом может стать источником ошибок.

*Мысленный эксперимент* – объект исследования заменяется его мысленным образом, который подвергается тем или иным мысленным воздействиям. Этот эксперимент включает в себя построение мысленной модели объекта, мысленное создание объекта, все эти манипуляции должны проводиться с учетом физических законов. Мысленный эксперимент предшествует материальному эксперименту.

*Материальный эксперимент*: в нем используются материальные, а не идеальные объекты исследования.

*Пассивный эксперимент* – наблюдение за объектом без искусственного вмешательства в его функционирование и измерение интересующих нас параметров.

*Активный эксперимент* – это эксперимент, связанный с вмешательством исследователя в существование объекта исследования, выбором специальных факторов влияния на объект исследования и контролем входных и выходных параметров исследуемой системы.

*Однофакторный эксперимент* предполагает изучение влияния только одного фактора на объект.

*Многофакторный эксперимент* – варьируются несколько факторов сразу и каждый эффект оценивается по результатам всех опытов, проведенных в данной серии экспериментов.

*Технологический эксперимент* – проводится на производстве и направлен на изучение элементов технологического процесса (производства, оборудования, деятельности работников) или процесса в целом.

*Социометрический эксперимент* используется для изучения существующих межличностных, социально-психологических отношений в малых группах с целью их последующего изменения.

Приведенная классификация не может быть признана полной, поскольку с расширением научного знания расширяется и область при-

менения экспериментального метода.

*Планирование эксперимента* – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

При этом существенно следующее:

- стремление к минимизации общего числа опытов;
- одновременное варьирование всеми переменными, определяющими процесс, по специальным правилам – алгоритмам;
- использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;
- выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов.

Задачи, для решения которых может использоваться планирование эксперимента, чрезвычайно разнообразны.

Где есть эксперимент, имеет место и наука о его проведении – *планирование эксперимента*.

Поиск оптимальных условий является одной из наиболее распространенных научно-технических задач, необходимо четко формулировать условия оптимизации. Этим определяется выбор цели исследования. Точная формулировка цели определяет успех исследования. Задачи, сформулированные аналогичным образом, называются задачами оптимизации. Процесс их решения называется процессом оптимизации или просто оптимизацией. Выбор оптимального состава многокомпонентных смесей или сплавов, повышение производительности действующих установок, повышение качества продукции, снижение затрат на ее получение – вот примеры задач оптимизации.

Эксперимент, который ставится для решения задач оптимизации, называется *экстремальным*.

Это название связано с глубокой аналогией между оптимизацией и поиском экстремума некоторой функции.

Рассмотрим две задачи.

1. Прочность бетона в значительной степени определяется маркой цемента, количеством наполнителя и количеством воды. Требуется установить связь между прочностью бетона и названными факторами.

2. Надежность некоторого полупроводникового прибора зависит от ряда технологических факторов. Требуется так подобрать значения этих факторов, чтобы надежность прибора повысилась.

Какая из этих задач является экстремальной?

Признаком экстремальной задачи является наличие в цели поиска экстремума некоторой функции.

Чтобы установить, какая из двух задач является экстремальной, надо обратиться к их формулировкам и выяснить, где удовлетворяются требования экстремальности.

В задаче 1 требуется установить связь между прочностью бетона и тремя факторами. Здесь не определено, какая прочность является оптимальной, и не требуется ее оптимизировать.

В задаче 2 необходимо повысить надежность прибора. Сама постановка задачи указывает на то, что существующая надежность не удовлетворяет экспериментатора и требуется поиск таких условий, при которых ее значения повысятся. Задачи называем интерполяционными, а типа 2 – экстремальными.

*Планирование эксперимента* – область знания, связанная с построением и оптимизацией математических моделей.

При планировании эксперимента исследуемый объект представляется «черным ящиком» (рис. 1.7), на который воздействуют факторы  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).



Рис. 1.7. Схема представления объекта исследований в виде «черного ящика»

В ходе выполнения эксперимента получаем математическую модель исследования, которая представляет собой уравнение, связывающее параметр оптимизации  $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$  с факторами  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , называемое уравнением регрессии:

$$y = b_0 x_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i,j=1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_{i,j,n=1}^k b_{ijk} x_i x_j x_n + \dots (1.8)$$

где  $x_i$  – значения влияющих факторов;  $b_0$  – свободный член, определяемый при  $x_i = x_j = x_k = \dots = 0$ ;  $b_i$  – коэффициенты регрессии, показывающие степень влияния соответствующего фактора на выходную функцию;  $b_{ij}$  – коэффициент, указывающий на наличие эффекта сочетания двух факторов;  $k$  – число столбцов в матрице планирования эксперимента;  $x_0 = 1$ .

Многомерное *факторное пространство* – это множество точек, каждая из которых соответствует определенной комбинации факторов. Область возможных комбинаций факторов называется областью возможных (допустимых) планов эксперимента.

Зависимость реакции объекта от точки факторного пространства называется *функцией отклика*  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , а ее геометрическое представление – поверхностью отклика (рис. 1.8).

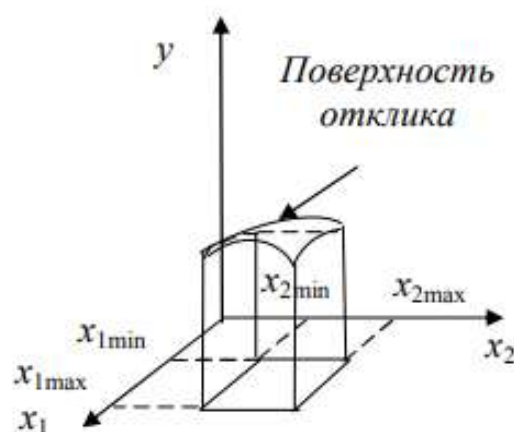


Рис. 1.8. Поверхность отклика

Каждый фактор может принимать в опыте одно из нескольких значений. Такие значения будем называть уровнями. Может оказаться,

что фактор способен принимать бесконечно много значений (непрерывный ряд). Однако на практике точность, с которой устанавливается некоторое значение, не беспредельна. Поэтому мы вправе считать, что всякий фактор имеет определенное число дискретных уровней. Это соглашение существенно облегчает построение «черного ящика» и эксперимента, а также упрощает оценку их сложности.

Фиксированный набор уровней факторов (т.е. установление каждого фактора на некоторый уровень) определяет одно из возможных состояний «черного ящика». Одновременно это есть условия проведения одного из возможных опытов. Если перебрать все возможные наборы состояний, то мы получим полное множество различных состояний данного «ящика». Одновременно это будет число возможных различных опытов.

Совокупность всех различных возможных состояний определяет сложность «черного ящика» и общее число возможных опытов.

Чтобы узнать число различных состояний, достаточно число уровней факторов (если оно для всех факторов одинаково) возвести в степень числа факторов  $k$ :

$$N = p^k,$$

где  $p$  – число уровней.

Система с пятью факторами на пяти уровнях имеет 3125 состояний, а для десяти факторов на четырех уровнях их уже свыше миллиона!

*Свойство объекта экспериментов:*

- воспроизводимость результатов;
- управляемость.

Планирование эксперимента предполагает активное вмешательство в процесс и возможность выбора в каждом опыте тех уровней факторов, которые представляют интерес. Поэтому такой эксперимент называется *активным*.

Объект, на котором возможен активный эксперимент, называется *управляемым*.

Плохая воспроизводимость объясняется действием фактора, си-



стематически изменяющегося (дрейфующего) во времени. Тогда нужно обращаться к специальным методам планирования.

Если все факторы неуправляемы, то возникает задача установления связи между параметром оптимизации и факторами по результатам наблюдений за поведением объекта, или, как говорят, по результатам *пассивного эксперимента*.

*Планирование эксперимента* – выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям, совокупность действий, направленных на разработку стратегии экспериментирования (от получения априорной информации до получения работоспособной математической модели или определения оптимальных условий).

Это целенаправленное управление экспериментом, реализуемое в условиях неполного знания механизма изучаемого явления.

*Под планом эксперимента* понимается совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.

Под словом *опыт* в данном случае имеется в виду отдельная, элементарная часть эксперимента.

Понятие *планирование эксперимента* определяем как процесс разработки плана эксперимента, включающий в себя все этапы изучения объекта исследования – от получения априорной информации до создания работоспособной математической модели объекта исследования или определения оптимальных условий.

Планирование способствует значительной интенсификации труда исследователя и сокращению затрат на эксперимент, повышению достоверности полученных результатов исследования.

Планирование эксперимента проводится в несколько *этапов*:

- постановка задачи (определение цели эксперимента, выяснение исходной ситуации, оценка допустимых затрат времени и средств, установление типа задачи);
- сбор априорной информации (получение литературы, опрос специалистов и т.п.);
- выбор способа решения и стратегии его реализации (установление типа модели, выявление возможных влияющих факторов, выявление выходных параметров, выбор целевых функций, создание необходимых нестандартных технических средств, формулировка статистических задач, выбор или разработка алгоритмов программ обработ-

ки экспериментальных данных).

Основными *концепциями* современного подхода к организации эксперимента являются *рандомизация, многофакторность и автоматизация*.

*Рандомизация.* Любое экспериментальное исследование проводится, как правило, в условиях действия систематических ошибок и факторов, которые трудно поддаются учету и контролю.

Так как изменение отклика  $Y$  имеет случайный характер, то в каждой точке факторного пространства необходимо проводить  $m$  повторных опытов и результаты наблюдений усреднять. Перед реализацией плана эксперимента на объекте необходимо рандомизировать (сделать случайными в пространстве и во времени) варианты варьирования факторов, т.е. используя таблицу равномерно распределенных случайных чисел, определить последовательность реализации вариантов варьирования плана в  $Nm$  опытах (где  $N$  – число строк матрицы полного факторного эксперимента (ПФЭ), а  $m$  – число повторных опытов). Тогда факторы эксперимента можно рассматривать как случайные величины и, следовательно, учесть статистически их влияние в значении ошибки эксперимента.

*Пример.* Произвести рандомизацию опытов ПФЭ типа  $2^2$  с тремя повторными опытами.

*Решение.* Из условия задачи следует, что  $N = 4$ ,  $m = 3$ , общее количество опытов равно 12. Матрица планирования эксперимента с рандомизированной последовательностью опытов приведена в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Матрица планирования эксперимента  
с рандомизированной последовательностью опытов

$u$	$x_1$	$x_2$	Последовательность проведения опытов		
			$y_{1u}$	$y_{2u}$	$y_{3u}$
1	-	-	10	4	6
2	+	-	9	2	7
3	-	+	1	8	11
4	+	+	5	3	12

*Многофакторность.* Организация эксперимента с применением многофакторных схем варьирования позволяет повысить точность оценок параметров подбираемых моделей для недетерминированных объектов, точнее оценить чувствительность выходной зависимой переменной объекта к вариации изучаемых входных независимых переменных.

*Автоматизация.* Технические средства вычислительных комплексов позволяют на качественно новом уровне по точности, быстродействию и наглядности решать задачи сбора, переработки и отображения информации. Программные средства предоставляют исследователю новые возможности организации процесса анализа данных, создания автоматически управляемой последовательности процедур анализа, использования интерактивного режима работы с пакетами прикладных программ.

Среди основных *методов планирования*, применяемых на разных этапах исследования, используют:

- планирование отсеивающего эксперимента, основное значение которого – выделение из всей совокупности факторов группы существенных факторов, подлежащих дальнейшему детальному изучению;
- планирование эксперимента для дисперсионного анализа, т.е. составление планов для объектов с качественными факторами;
- планирование регрессионного эксперимента, позволяющего получать регрессионные модели (полиномиальные и иные);
- планирование экстремального эксперимента, в котором главная задача – экспериментальная оптимизация объекта исследования;
- планирование при изучении динамических процессов и т.д.

При *пассивном* эксперименте существуют только факторы в виде входных контролируемых, но неуправляемых переменных, и экспериментатор находится в положении пассивного наблюдателя. Задача планирования: сбор информации, выбор количества и частоты измерений, выбор метода обработки результатов измерений.

Наиболее часто целью пассивного эксперимента является построение математической модели объекта, которая может рассматриваться

либо как хорошо, либо как плохо организованный объект.

В хорошо организованном объекте имеют место определенные процессы, в которых взаимосвязи входных и выходных параметров устанавливаются в виде детерминированных функций. Поэтому такие объекты называют *детерминированными*.

Плохо организованные или диффузные объекты представляют собой *статистические модели*. Методы исследования с использованием таких моделей не требуют детального изучения механизма процессов и явлений, протекающих в объекте.

Множество всех точек проведения экспериментов  $x^i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ ,  $i=1, 2, \dots, N$  представляется с помощью матрицы

$$t = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdot & \cdot & x_{1k} \\ x_{21} & \cdot & \cdot & x_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdot & \cdot & x_{nk} \end{vmatrix}$$

и называется *планом эксперимента*.

Однофакторный пассивный эксперимент проводится путем выполнения  $n$  пар измерений в дискретные моменты времени единственного входного параметра  $x$  и соответствующих значений выходного параметра  $y$ . Аналитическая зависимость между этими параметрами вследствие случайного характера возмущающих воздействий рассматривается в виде зависимости математического ожидания  $y$  от значения  $x$ , носящей название *регрессионной*.

Соответствующая линия А В показана на графике (рис. 1.9).

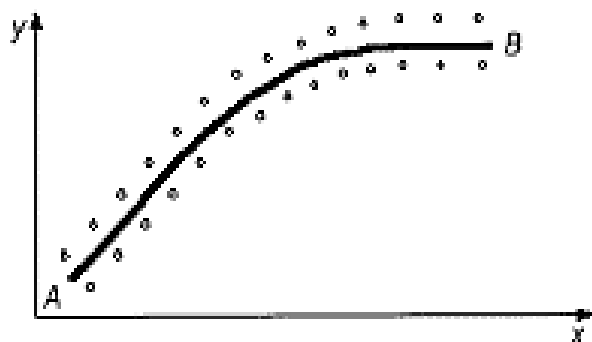


Рис 1.9. График регрессионной зависимости  $y$  от  $x$

Целью однофакторного пассивного эксперимента является по-

Нередко для выбора аппроксимирующей функции пользуются кривой регрессионной зависимости, проведенной «на глаз».

$$y = a_1 + a_2x + \dots + a_mx^{m-1}. \quad (1.9)$$

В общем случае результаты измерения  $l_i$  значения выходной величины и ее значения  $y_i$ , определяемые регрессионной зависимостью от входного фактора  $x_i$ , не совпадают, т.е. отлична от нуля разность  $\Delta_i = l_i - y_i$ , что связано с наличием погрешности измерения и возмущающих воздействий. Обычно считают, что  $\Delta_i$  не зависит от значения  $y$  (т.е. аддитивна) и подчиняется нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием.

$$\begin{aligned} l_1 &= \sum_{j=1}^m a_j x_1^{j-1} + \Delta_1; \\ l_2 &= \sum_{j=1}^m a_j x_2^{j-1} + \Delta_2; \\ &\dots\dots\dots \\ l_n &= \sum_{j=1}^m a_j x_n^{j-1} + \Delta_n. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Система уравнений (1.10) линейна относительно  $a_j$ .

Для нахождения оценок  $a_j$  из условия минимума  $\Delta_j$  необходимо добиться равенства нулю всех частных производных функций

$$\sum_{i=1}^n \left( l_i - \sum_{j=1}^m a_j x_i^{j-1} \right) \quad \text{по } a_j.$$

Получим систему нормальных уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \left( l_i - \sum_{j=1}^m a_j x_i^{j-1} \right) x_i^{j-1} = 0 \quad (j=1,2,\dots,m). \quad (1.11)$$

Сгруппировав все коэффициенты при неизвестных  $a_j$  и записав уравнения системы (1.11) в стандартном виде, можно вычислить искомые параметры  $a_j$  методом определителей.



## 2. АПРИОРНАЯ ИНФОРМАЦИЯ И МЕТОДЫ ЕЕ ОБРАБОТКИ

*Априорной* называется информация, которой располагает исследователь до того, как он приступит к экспериментам.

*Априорная информация* – это основа для формулировки проблемы оптимальности.

*Текущая информация* – средство решения этой проблемы.

В современных отраслях знаний объем этой информации, как правило, достаточно велик и определяется публикациями по теме. Подобная информация часто противоречива и имеет не всегда высокую достоверность (разные эксперименты в сходных условиях дали различные результаты), а границы ее размыты (не всегда известен диапазон варьирования параметров).

Таким образом, априорная информация может быть представлена в виде множества отдельных несистематизированных данных об объекте исследования (процессе, устройстве) и его параметрах. Следствием этого является задача об объективном ограничении номенклатуры переменных и о выделении главных факторов.

### 2.1. Системный подход

*Система* – это ряд элементов, взаимосвязанных структурно и функционально. Понятие системы относительно: любая система включает подсистемы и сама является подсистемой более общей системы.

*Теория систем* – это формальная эмпирико-интуитивная дисциплина, применимая ко всем наукам, имеющим дело с системами.

Связь системы с окружением определяется входом и выходом. Отсюда функция системы – это преобразование входов в выходы. Оно может моделироваться терминологически, математически, физическими аналогами, знаковыми системами и т.п.

Система разомкнутая (открытая), если существует обмен массой, энергией, информацией с окружающей средой. Система замкнута (закрыта), если этот объем пренебрежимо мал.

*Структурное описание системы* – это ее внутренние параметры, *функциональное* – внешние. Понятие структура (Str) характеризует внутреннюю организацию, порядок и построение системы. Таким образом, структура – это совокупность элементов и отношений между ними. Если  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  есть множество элементов, а  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  – множество отношений, то структура  $Str = \{E, R\}$  представляет собой множество, состоящее из  $E$  и  $R$  (рис. 2.1) [1].

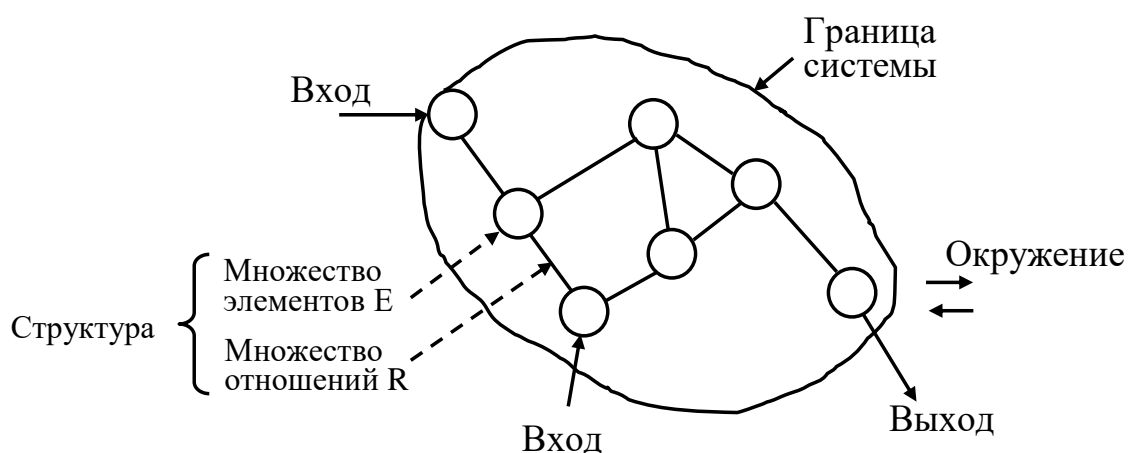


Рис. 2.1. Модель системы

В существующем виде системный подход эффективно выполняет постановку проблемы, базируясь на дескриптивном (описательном) анализе и систематизации существующего знания, т.е. априорной информации. Накопление огромной ее массы не только не облегчает, но значительно усложняет представление об исследуемом объекте.

Системный подход к априорной информации позволяет ограничить номенклатуру переменных факторов, уточнить общую цель и детализировать подход при углублении задачи.

Любая общая картина сложного объекта всегда остается неполной и односторонней. Выступая с анализом, системный подход выделяет свойства, делающие объект частью целого, а с синтезом – позволяет представить целое, состоящее из отдельных частей. Здесь большую роль играет принцип формализации – уточнения содержания посредством выявления его формы.

Методика описания системы включает следующую последовательность действий: выбрать систему для исследований, определить надсистему, системную цель, подсистему и системную среду, описать функциональные свойства подсистем, определить системную функцию и построить блочно-связевую схему системы (рис. 2.2).

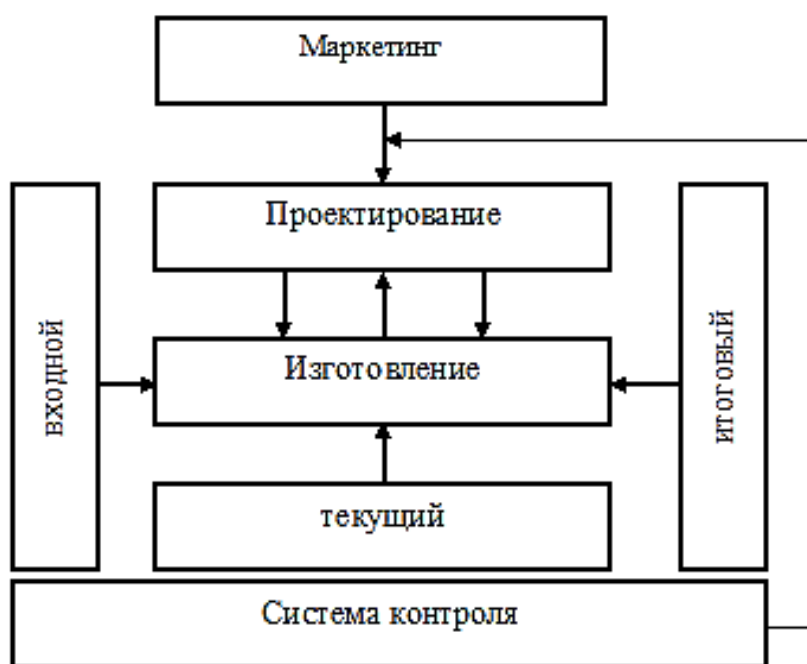


Рис. 2.2. Блок-схема системы

## 2.2. Классификация

Классификация любых объектов неразрывно связана с системным подходом и является его логической конкретизацией и развитием. Первая операция, производимая исследователем над множеством данных априорной информации, включает изучение его организации, т.е. разнообразия входящих в него объектов и их связей.

*Классификация* – это систематизированное распределение явлений и объектов на определённые группы, классы, позиции, виды на основании их сходства и различия.

Основой любой классификации являются признаки – характеристики, обобщаемые для всего множества объектов (например, измерительные инструменты). Признак *n* значим, если множество объектов

разбито на  $n$  классов. Знать признак – это определить принадлежность к соответствующему классу по крайней мере одного объекта (например: микрометрические и штанген-инструменты). В качестве признаков используют любой критерий, например степень сложности объектов.

Итогом систематизации должна быть классификация, которая не только делит все множество на отдельные группы и элементы, но и вскрывает связи между ними.

Следовательно, классификация требует знания соотношения целого и его элементов, а также структурных связей.

При классификации особое внимание следует уделять единому обобщающему логическому признаку. Очень важным является требование выдерживать единый иерархический уровень признаков.

Наконец, различительные признаки должны быть дискретными, т.е. позволять однозначно различать группы элементов классификации (кресло, стул, табурет), или хотя бы условно дискретными (прессы малого (до 63 т), среднего до (100 т) и большого (более 100 т) усилия).

Первоначальным этапом классификации является формализация описания множества объектов путем установления базисов – подмножеств фактически необходимых признаков.

Базисная таблица идентификации включает столбцы – объекты и строки – необходимые и достаточные признаки для отделения каждого объекта от всех остальных.

Практически легче выделить признаки не путем их подробного описания, а путем сопоставления друг с другом.

Критерием разграничения различительных и избыточных признаков является их устранимость. Признак устраним, если объекты могут быть различимы без этого признака, т.е. эти признаки связывают систему с окружением – объектами в ней отсутствующими. При описании среды через систему они становятся наиболее существенными.

Классификация в определённой степени субъективна и не однозначна. На рис. 2.3 представлены три варианта классификации одного и того же множества объектов. Все они приемлемы.

На рис. 2.4 представлен вариант классификации аппаратов точного высева пропашных сеялок.

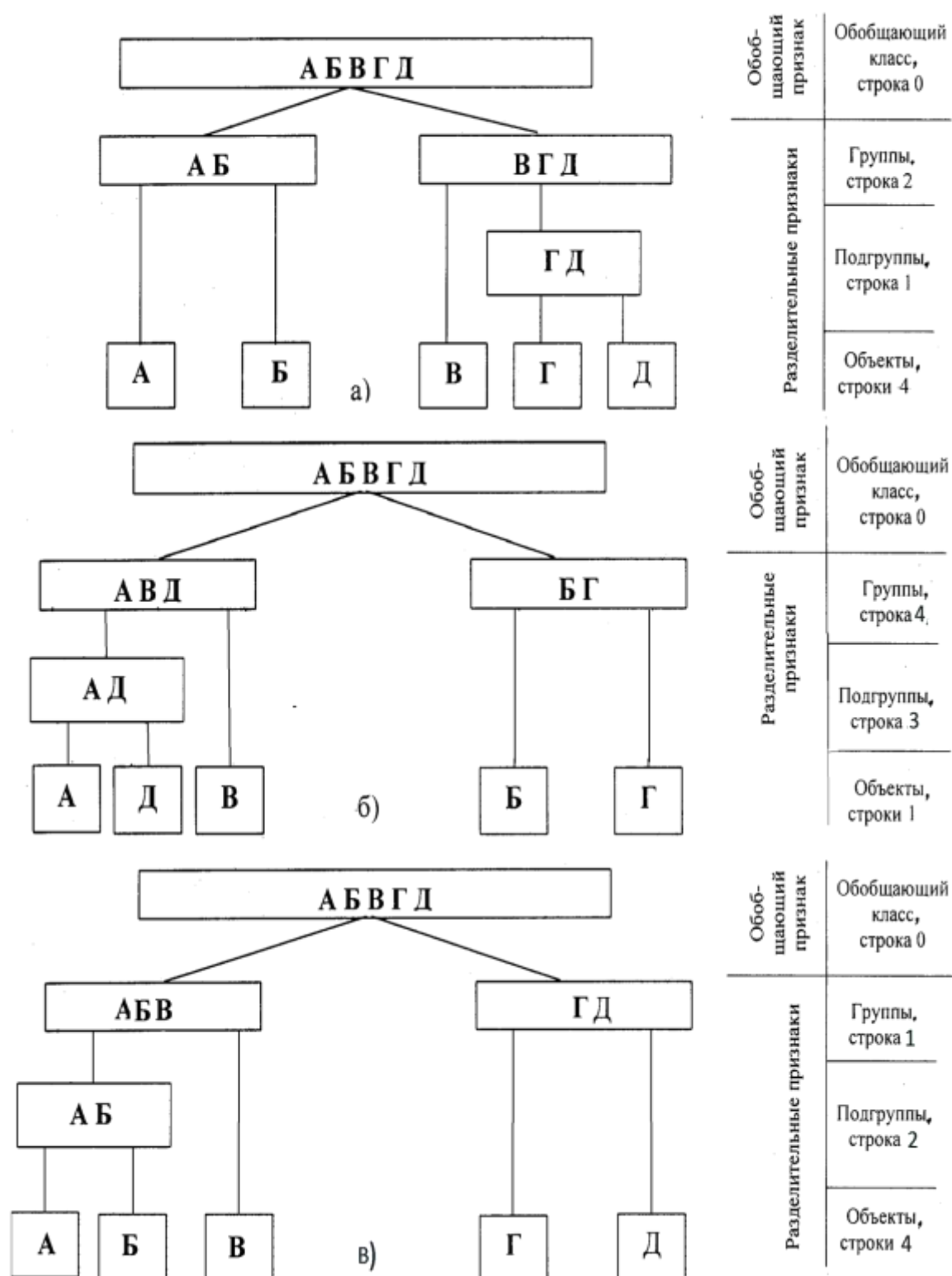


Рис. 2.3. Варианты классификации

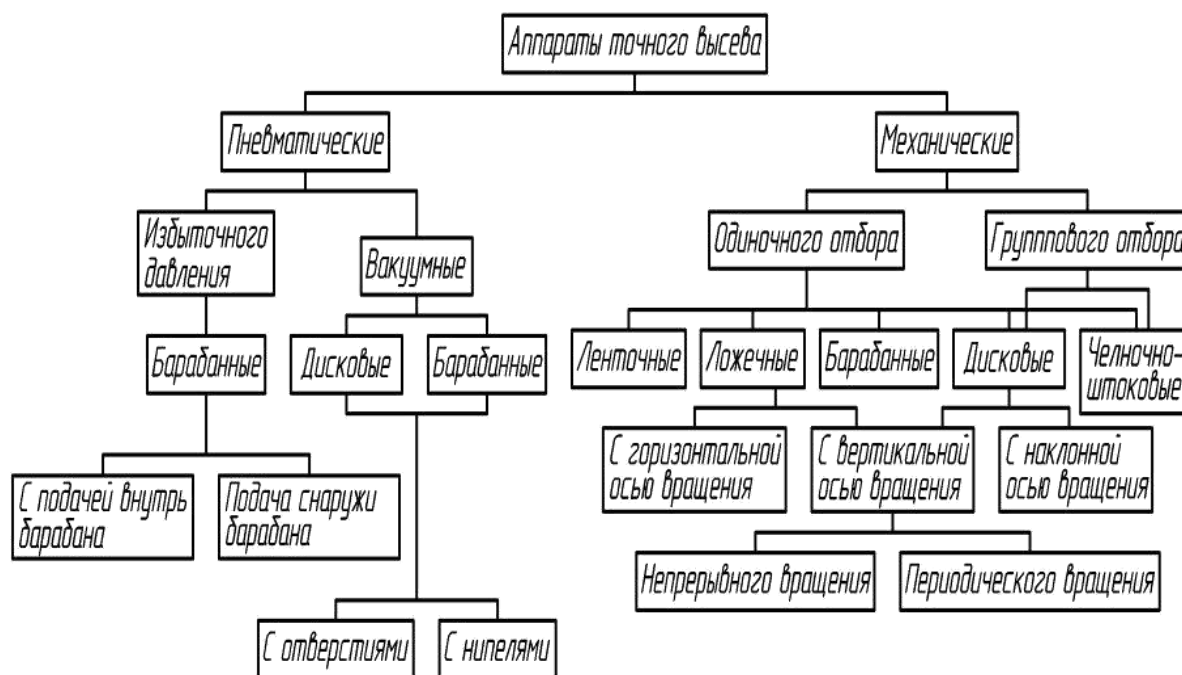


Рис. 2.4. Классификация высевающих аппаратов по Г.М. Бузенкову

## 2.3. Априорное ранжирование.

### Метод экспертных оценок

*Ранжирование* – это оценка степени влияния на результат (выход) исследования отдельных переменных факторов путём назначения им ранга – порядкового номера. Чем меньше ранг, тем сильнее влияние.

*Ранг* – показатель, характеризующий порядковое место объекта в группе других объектов, обладающих существенными для оценки свойствами.

*Априорное ранжирование* - один из методов экспертных оценок, используемых для упорядочения исходной информации, применяемый при низкой достоверности априорной информации, наглядно описанной логистической кривой (рис. 2.5). Это могут быть реальные люди (специалисты в данной области) или различные литературные источники (отчеты, статьи, монографии и т.п.), в которых опубликованы результаты подобных или аналогичных исследований. При этом экспертная оценка является вероятностной, основанной на способности личности давать полезную информацию в условиях неопределенности.



Экспертами используется определенная шкала порядка, на которой заданный показатель определяет расположение объектов во всей их совокупности в соответствии с принятым масштабом шкалы, т. е. каждому объекту соответствует некоторая количественная характеристика или мера.

Количество ранжируемых объектов, как правило, не должно превышать 20, а наиболее надежные результаты относятся к 10 объектам. Численность экспертов должна превышать число оцениваемых факторов, но быть меньше общего, потенциально возможного числа специалистов.

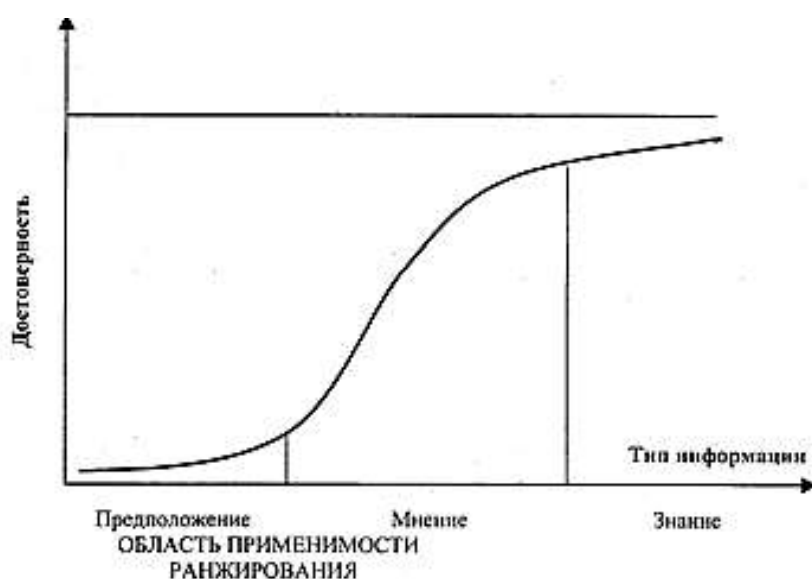


Рис. 2.5. Зависимость достоверности информации от ее типа

*Преимущества априорного ранжирования:* сравнительная простота организации процедуры и оперативность получения результатов.

*Недостатки априорного ранжирования:* большая зависимость результатов от качества организации экспертизы и подбора экспертов, т.е. определенная субъективность. Кроме того, при оценке тех или иных факторов (мероприятий) для данной системы (предприятия, фирмы) эксперты пользуются своим прежним опытом или взглядами (именно поэтому экспертиза называется априорной). Поэтому правильная постановка вопросов и выбор факторов для данной системы имеют особое значение и существенно влияют на результаты экспертизы.

#### *Методика априорного ранжирования*

1. Постановка цели и задач исследований.
2. Выбор параметров выхода (оптимизации) или отклика.
3. Составление перечней факторов, влияющих на исследуемый процесс.

4. Операционное определение факторов.

5. Установление интервалов варьирования отдельных факторов.

6. Ранжирование факторов в порядке убывания их воздействия на параметр выхода. Каждому фактору из общего перечня присваивается ранг (цифра натурального ряда), соответствующий месту, отведенному исследователем данному фактору в ранжируемом ряду (наиболее важный фактор – 1, менее важный – 2, еще менее важный – 3 и т.д.).

7. Построение матрицы априорного ранжирования, в которой количество столбцов соответствует количеству факторов ( $n$ ), а количество строк соответствует числу опрошенных экспертов.

8. Формальная проверка ранжирования. Определение суммы рангов в каждом столбце матрицы априорного ранжирования:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^n a_i, \quad (2.1)$$

где  $n$  – число рассматриваемых факторов.

9. Определение суммы рангов по факторам:

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j}, \quad (2.2)$$

где  $a_{i,j}$  – ранг каждого  $i$ -го фактора у  $j$ -го специалиста (или по  $j$ -му источнику литературы);  $m$  – количество опрошенных экспертов (или рассмотренных литературных источников).

10. Определение средней суммы рангов:

$$\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j}}{n}. \quad (2.3)$$

11. Определение абсолютной величины разности между каждой суммой рангов по факторам и средней суммой рангов:

$$\Delta_i = \left| \sum_{j=1}^m a_{i,j} - \bar{T} \right|. \quad (2.4)$$

12. Определение квадрата разностей:

$$\Delta_i^2. \quad (2.5)$$

13. Определение суммы квадратов разностей:

$$S_w = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2. \quad (2.6)$$

14. Определение показателей групп связанных рангов:

$$\gamma_{(k)_j} = t_k^3 - t, \quad (2.7)$$

где  $t$  – количество одинаковых связанных рангов в  $j$ -м ранжировании;  
 $k$  – индекс величины одинаковых связанных рангов в  $j$ -м ранжировании.

15. Определение суммарного показателя связанных рангов по ранжированию:

$$T_j = \sum_{l=1}^p \gamma_{(k)_{jl}}, \quad (2.8)$$

где  $p$  – число групп одинаковых связанных рангов в  $j$ -м ранжировании.

16. Определение суммы суммарных показателей связанных рангов:

$$\sum_{j=1}^m T_j. \quad (2.9)$$

17. Определение коэффициента конкордации:

$$W = \frac{12 S_w}{m^2 (n^3 - n) - m \sum_{j=1}^m T_j}. \quad (2.10)$$

18. Предварительная оценка коэффициента конкордации по его числовому значению. Коэффициент конкордации  $W$  меняется от 0 до 1, причем равенство единице означает, что все эксперты дали одинаковые оценки по данному признаку, а равенство нулю означает, что связь между оценками, полученными от разных экспертов, не существует.

19. Определение значимости коэффициента конкордации устанавливается с помощью критерия Пирсона:

$$v = n - 1; \quad (2.11)$$

$$\chi_p^2 = \frac{12 S_w}{mn(n+1) - \frac{1}{(n-1)} \sum_{j=1}^m T_j} = m(n-1)W. \quad (2.12)$$

*Примечание:* при отсутствии связанных рангов величина  $\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^m T_j$  обращается в нуль.

При числе факторов меньше или равном семи можно пользоваться специальной таблицей (расчетное  $S_w$  должно быть больше критического, табличного). При большем числе факторов достаточно, чтобы значение расчетного  $\chi_r^2$  критерия было больше значения табличного  $\chi_t^2$  критерия для соответствующей степени свободы ( $\nu$ ) и доверительной вероятности ( $p$ ), обычно принимаемой 0,95 или 0,99. Гипотеза о наличии согласованности мнений исследователей может быть принята, если при заданном числе степеней свободы табличное значение  $\chi^2$  меньше расчетного для 5%-го уровня значимости.

#### 20. Построение априорных диаграмм рангов.

Получение значимого коэффициента конкордации (т.е. подтверждение согласованности мнений специалистов) дает возможность построить среднюю априорную диаграмму рангов, отражающую коллективное мнение специалистов. Диаграмма рангов строится в координатах: ордината – сумма рангов; абсцисса – ранжируемые объекты (факторы). Чем меньше сумма рангов данного фактора, тем выше его место на диаграмме (рис. 2.6). С помощью диаграммы рангов производится оценка значимости факторов.

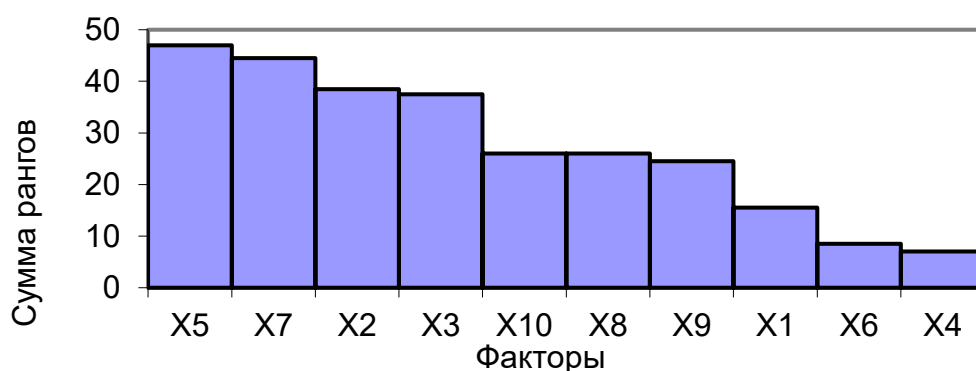


Рис. 2.6. Диаграмма рангов

21. Принятие решений по стратегии последующего эксперимента. Диаграмма рангов может иметь следующий вид:

- Распределение (различие в рангах) факторов и их убывание равномерное. В этом случае уровень априорной информации весьма низок, и поэтому все факторы должны включаться в эксперимент.
- Распределение равномерное, а убывание неравномерное. В этом случае, если возможно, лучше включить в физический эксперимент все факторы, но возможен и априорный отсев их.
- Распределение неравномерное, а убывание равномерное. Возможен априорный отсев факторов с низким рангом.

➤ Распределение и убывание неравномерное (например, экспоненциальное). Это наиболее благоприятная ситуация, так как нужно отсеять ряд факторов, отнесенных к шумовому полю.

### *Пример априорного ранжирования*

*Цель исследований:* обоснование функциональной схемы, параметров и режимов работы пневматического аппарата для одновременного высева семян кукурузы и сорго в один рядок с заданными нормой и распределением по площади посева.

*Объект исследований:* технологический процесс одновременного высева семян двух культур аппаратом пневматического действия.

*Предмет исследования* – параметры и режимы работы высевающего аппарата для одновременного высева семян двух культур, закономерности и характеристики их влияния на объект исследования.

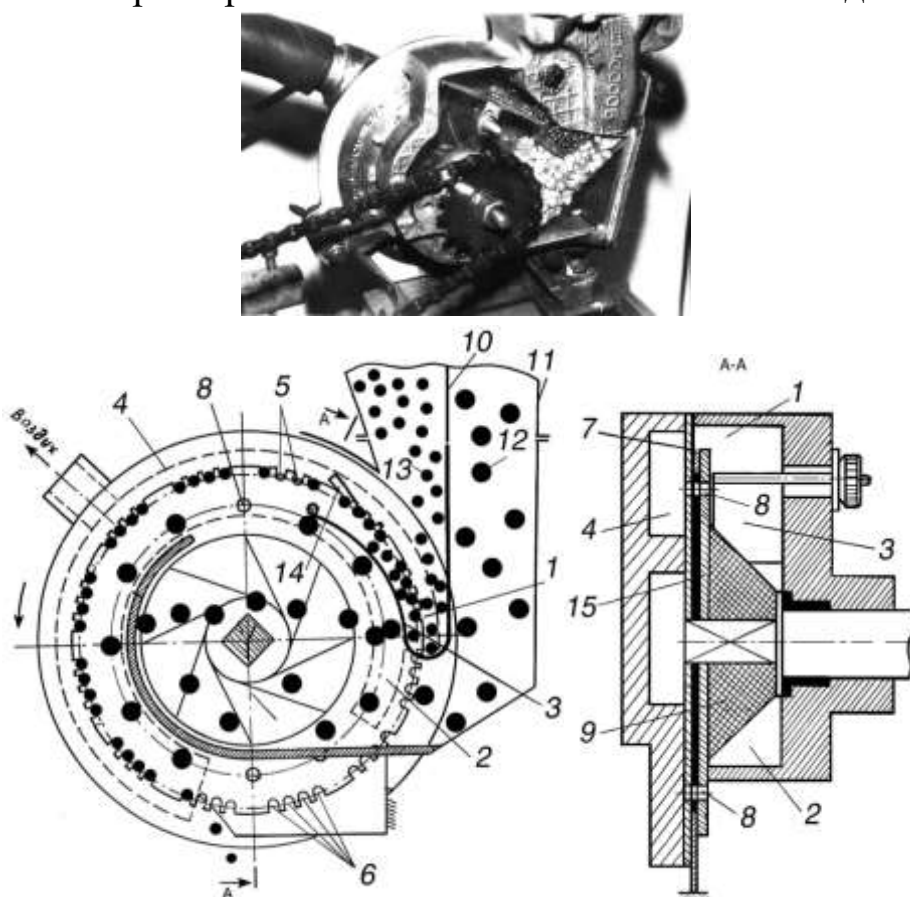


Рис. 2.7. Экспериментальный высевающий аппарат для совместного высева семян кукурузы и сорго в один рядок: 1 - семенная камера для семян сорго; 2 – семенная камера для семян кукурузы; 3 - перегородка; 4 - вакуумная камера; 5 - просасывающие отверстия; 6 – вырезы; 7 - присасывающая щель; 8 - отверстия; 9- ворошилка; 10 – перегородка; 11- семенной ящик; 12 – семена кукурузы; 13 – семена сорго; 14 – отгиб сбрасывателя лишних семян; 15 – накладка диска

Поскольку в экспериментальном высевальном аппарате (рис. 2.7) происходит два самостоятельных процесса высева семян двух культур, в которых некоторые факторы являются общими для обоих процессов, то при ранжировании факторов они были разделены на три группы:

- факторы, влияющие только на процесс высева семян кукурузы (10 факторов);
- факторы, влияющие только на процесс высева семян сорго (22 фактора);
- факторы, общие для обоих процессов.

Параметром выхода (оптимизации) технологического процесса высева семян пропашных культур выбрана средняя подача семян одной ячейкой (высевающим отверстием).

Выбраны факторы по каждому процессу: 10 факторов, влияющих только на процесс высева семян кукурузы (табл. 2.1). Построена матрица априорного ранжирования (табл. 2.2).

Таблица 2.1

Пример заполненной анкеты экспертной оценки

№ п/п	Наименование фактора	Обозначение	Размерность	Интервал варьирования	Ранги факторов				
					Группа экспертов				
					1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Факторы, влияющие только на процесс высева семян кукурузы									
1	Частота вращения высевающего диска	X <sub>1</sub>	рад/с	1	2	1	1	1	2
2	Величина разрежения в вакуумной камере аппарата	X <sub>2</sub>	кПа	1	1	2,5	2	3	1
3	Положение подвижной части перегородки камер	X <sub>3</sub>	мм	1,5	3	2,5	3	2	3
4	Количество присасывающих отверстий на высевающем диске	X <sub>4</sub>	шт	7	4	3	5	4	5
5	Диаметр присасывающих отверстий	X <sub>5</sub>	мм	2,5	8	8	10	9	9
6	Радиусы удаления присасывающих отверстий от центра высевающего диска	X <sub>6</sub>	мм	1	9	7	8	7	8
7	Толщина диска	X <sub>7</sub>	мм	0,5	10	9	9	10	10

Окончание табл. 2.1

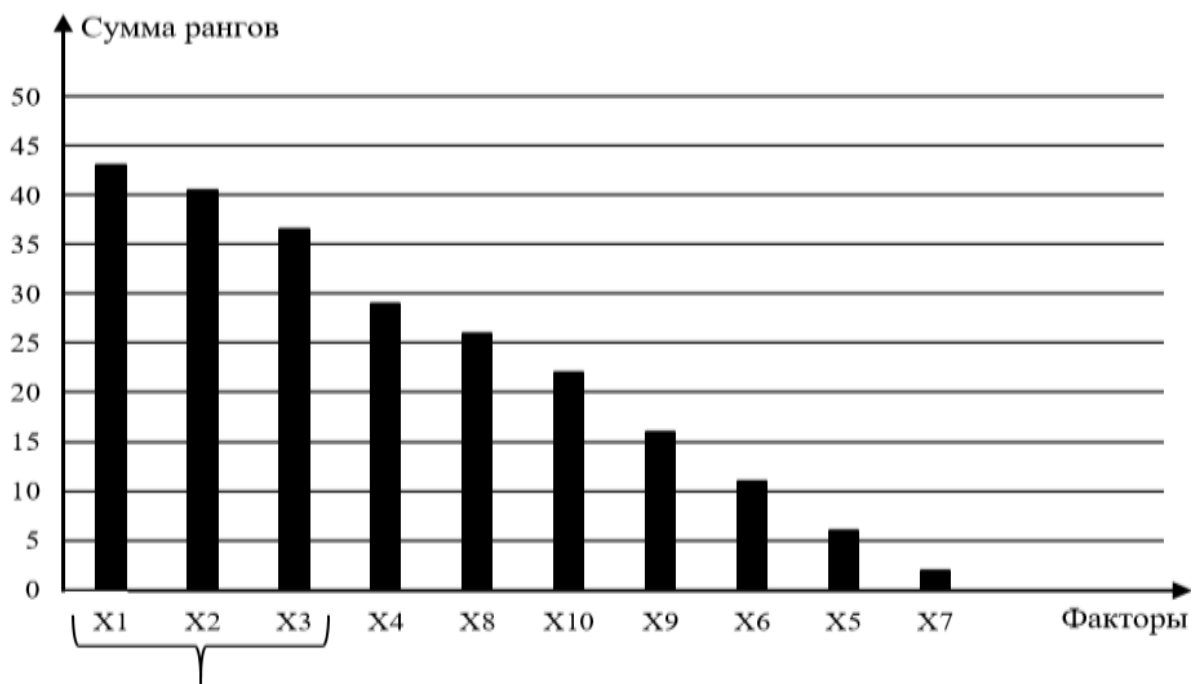
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	Конструктивный вариант ворошил-ки семян	X <sub>8</sub>	-	-	5	5	4	6	4
9	Угол наклона дна семенной камеры	X <sub>9</sub>	град.	15	7	6	6	8	7
10	Расстояние от перегородки семенных камер до дна семенной камеры	X <sub>10</sub>	мм	15	6	4	7	5	6
					$S_{10} = 55$				

Таблица 2.2

Матрица априорного ранжирования

№ п/п	Источники информации (эксперты) (m=5)	Факторы (n=10)										$T_j = \sum_{l=1}^p \gamma_{(k)_{jl}}$
		X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>	X <sub>9</sub>	X <sub>10</sub>	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	1	2	1	3	4	8	9	10	5	7	6	0
3	2	1	2,5	2,5	3	8	7	9	5	6	4	$T_2 = 6$
4	3	1	2	3	5	10	8	9	4	6	7	0
5	4	1	3	2	4	9	7	10	6	8	5	0
6	5	2	1	3	5	9	8	10	4	7	6	0
7	$\sum_{j=1}^5 a_{i,j}$	7	9,5	13,5	21	44	39	48	24	34	28	$\sum_{j=1}^5 T_j = 6$
8	$\Delta_i$	19,8	17,3	13,3	5,8	17,2	12,2	21,2	2,8	7,2	1,2	$\bar{T} = 26,8$
9	$\Delta_i^2$	392,0 4	299,2 9	176,8 9	33,64	295,8 4	148,8 4	449,4 4	7,84	51,84	1,44	$S_w = 1857,1$
10	Ранги	1	2	3	4	9	8	10	5	7	6	

Далее проведены расчеты согласно приведенной выше методике. Определен коэффициент конкордации, величина которого в нашем примере составила  $W = \frac{12 \cdot 1857,1}{25(1000 - 10) - 5 \cdot 6} = 0,901$ . Так как величина коэффициента конкордации  $W = 0,901$  приближается к 1, то между мнениями специалистов имеется существенная связь.



Наиболее важные факторы

Рис. 2.8. Диаграмма рангов для группы экспертов

Поскольку табличное значение  $\chi^2_T$  критерия меньше расчетного ( $16,92 < 33,81$ ), то с 95% вероятностью можно утверждать, что мнение всех специалистов о степени влияния факторов на процесс согласуется с коэффициентом конкордации, равным 0,901.

Получение значимого коэффициента конкордации (т.е. подтверждение согласованности мнений специалистов) дает возможность построить среднюю априорную диаграмму рангов в координатах: ордината – обратная сумма рангов; абсцисса – ранжируемые объекты (факторы). Чем меньше сумма рангов данного фактора, тем выше его место на диаграмме (рис. 2.8).

Анализ полученной диаграммы показал, что статистически объективно из множества априорной информации выделены три ведущих фактора ( $x_1, x_2, x_3$ ), оказывающих наибольшее влияние на параметр выхода. Дальнейшие экспериментальные исследования могут планироваться только для этих переменных.



### 3. ПАРАМЕТР ОПТИМИЗАЦИИ

#### 3.1. Виды параметров оптимизации. Требования к параметру оптимизации

При планировании экстремального эксперимента очень важно определить параметр, который нужно оптимизировать. Цель исследования должна быть сформулирована очень четко и допускать количественную оценку.

*Параметр оптимизации* – характеристика цели, заданная количественно.

*Параметр оптимизации* является реакцией (откликом) на воздействие факторов, которые определяют поведение выбранной вами системы.

Реакция объекта многогранна, многоаспектна. Выбор того аспекта, который представляет наибольший интерес, как раз и задается целью исследования.

*Виды параметров оптимизации.* Параметры оптимизации могут быть разнообразными, в зависимости от объекта и цели исследования. Приведем один вариант классификации параметров оптимизации (рис. 3.1).

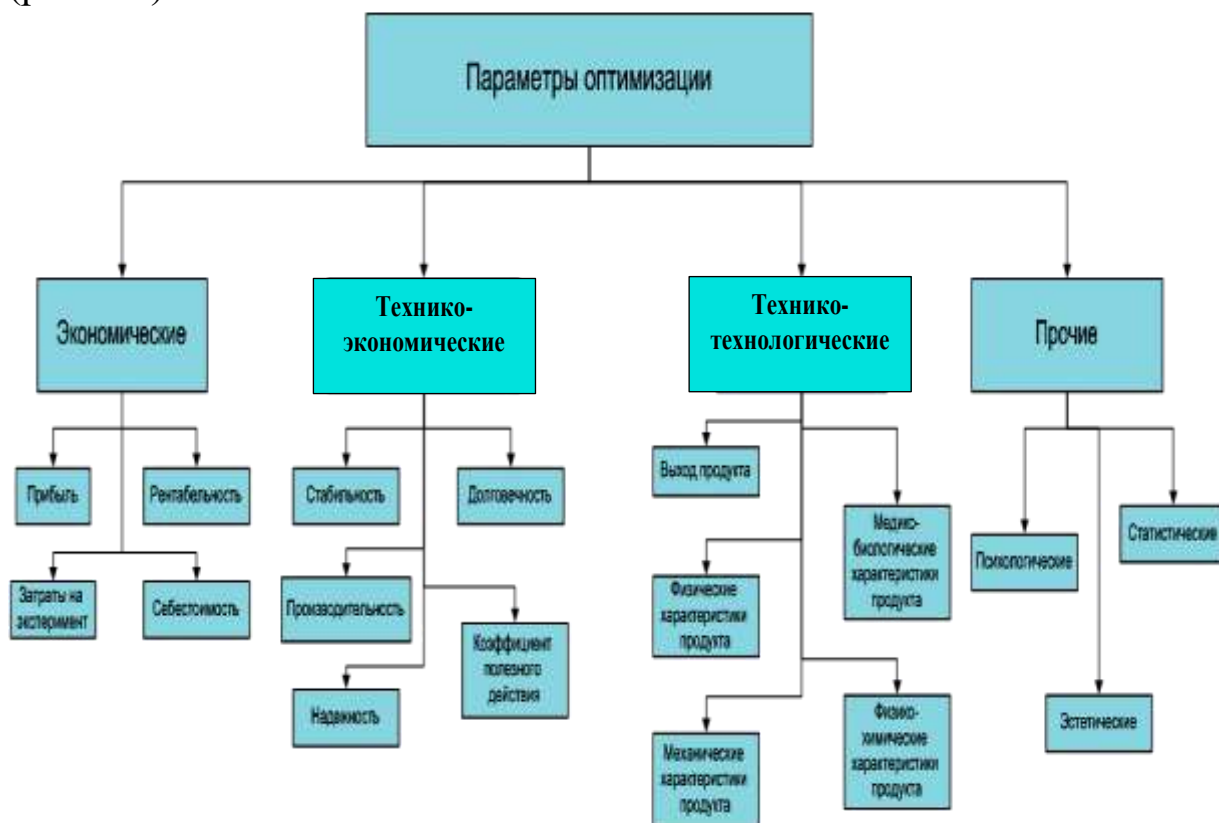


Рис. 3.1. Виды параметров оптимизации

Движение к оптимуму возможно, если выбран один единственный параметр оптимизации. Тогда прочие характеристики процесса уже не выступают в качестве параметров оптимизации, а служат ограничениями.

Другой путь – построение обобщенного параметра оптимизации как некоторой функции от множества исходных.

Экономические параметры оптимизации (прибыль, себестоимость и рентабельность) обычно используются при исследовании действующих промышленных объектов (см. рис. 3.1). Если цена опытов одинакова, затраты на эксперимент пропорциональны числу опытов, которые необходимо поставить для решения данной задачи. Это в значительной мере определяет выбор плана эксперимента.

Среди технико-экономических параметров наибольшее распространение имеет производительность. Долговечность, надежность, стабильность и другие параметры связаны с длительными наблюдениями и зачастую используются при исследовании ответственных дорогостоящих объектов (рис. 3.1).

Характеристики количества и качества продукта образуют группу технико-технологических параметров. Почти во всех исследованиях приходится учитывать количество и качество получаемого продукта. Процент выхода химической реакции, выход годных изделий могут быть использованы мерой количества продукта.

В категорию классификации «прочие» вошли различные редко встречающиеся параметры, например статистические параметры, используемые для улучшения характеристик случайных величин или случайных функций. В качестве примеров назовем задачи на минимизацию дисперсии случайной величины, на уменьшение числа выбросов случайного процесса за фиксированный уровень и т.д.

*Пример:* Показателем качества процесса посева семян пропашных культур является величина шага посева и минимизация дисперсии отклонений фактического шага посева от требуемого агротехническими нормами (рис. 3.2).

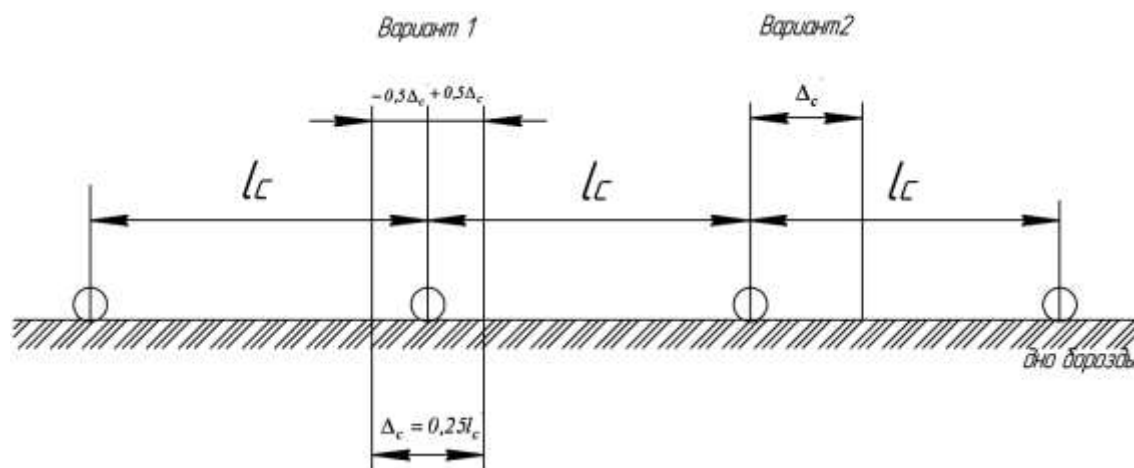


Рис. 3.2. Распределение семян пропашных культур в рядке:

$l_c$  – шаг посева семян;  $\Delta_c$  – величина отскока семян в борозде

С ростом сложности объекта возрастает роль психологических аспектов взаимодействия человека или животного с объектом. Так, при выборе оптимальной организации рабочего места оператора параметром оптимизации может служить число ошибочных действий в различных возможных ситуациях.

При решении задачи технической эстетики или сравнении произведений искусства возникает потребность в эстетических параметрах. Они основаны на ранговом подходе, описанном выше.

Условие выбора лучшего (оптимального) варианта решения какой-либо задачи называют *критерием оптимальности*, или *целевой функцией*.

В качестве целевой функции могут приниматься экономические, технические, экологические и другие показатели. Обычно в технике предпочтение отдается экономическим показателям, как наиболее общим, так как в них могут быть учтены все (или почти все) другие показатели.

Из экономических показателей одним из самых общих является прибыль  $\Pi = (\Pi - 3) \cdot A$  (где  $\Pi$  – цена единицы продукции; 3 – затраты на производство единицы продукции;  $A$  – объем выпуска продукции).

При оптимизации параметров целевая функция принимает вид

$$\Pi \rightarrow \max.$$

Сформулировать целевую функцию иногда сложно. Например, при проектировании или модернизации зерноуборочного комбайна можно сформулировать такие целевые функции: себестоимость, надежность, маневренность и др., а при ограничениях по ряду параметров: удельное давление на почву, дробление зерна, габариты комбайна и др.

Если при проектировании технических объектов можно выделить один параметр, которому отдается безусловное предпочтение и который наиболее полно характеризует свойства проектируемого объекта, то этот параметр можно принять за целевую функцию. В этом случае задача проектирования сводится к *однокритериальной* задаче оптимизации целевой функции при условии соблюдения ограничений. При этом одна часть параметров попадает под категорию ограничений, а другая часть параметров, на которые не накладываются ограничения, принимается такой, какой получилась при оптимизации целевой функции.

Задачи могут быть однокритериальными и многокритериальными. Так, например, комбайн характеризуется многими параметрами, определяющими его качество и ценность. Некоторые из этих параметров необходимо увеличивать, а другие уменьшать до возможных пределов. Ограничения и связи между отдельными параметрами комбайна приводят к необходимости идти на компромисс и выбирать для каждой характеристики не наилучшее возможное значение, а такое, при котором и другие важные характеристики будут иметь приемлемое значение. Поэтому при выборе окончательного варианта нельзя ограничиваться сравнением по одной какой-либо характеристике, а необходимо принимать во внимание всю их совокупность. Задачи проектирования, проводимые по нескольким критериям

оптимизации, носят название *многокритериальных*, или *задач векторной оптимизации*.

### *Требования к параметру оптимизации*

*Параметр оптимизации* должен быть *количественным*, т.е. задаваться числом. Мы должны уметь его измерять при любой возможной комбинации выбранных уровней факторов.

Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации, будем называть *областью его определения*. Области определения могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными.

Например, выход реакции – это параметр оптимизации с непрерывной ограниченной областью определения. Он может изменяться в интервале от 0 до 100%. Число бракованных изделий, число зерен на шлифе сплава, число кровяных телец в пробе крови – вот примеры параметров с дискретной областью определения, ограниченной снизу.

*Требование к параметру оптимизации: уметь измерять параметр оптимизации* – это значит располагать подходящим прибором.

При отсутствии возможности измерить количественно параметр оптимизации используют ранжирование (ранговый подход). При этом параметрам оптимизации присваиваются оценки – ранги по заранее выбранной шкале: двухбалльной, пятибалльной и т. д. Ранговый параметр имеет дискретную ограниченную область определения. В простейшем случае область содержит два значения (да, нет; хорошо, плохо). *анг* – это количественная оценка параметра оптимизации, но она носит условный (субъективный) характер. Качественному признаку соответствует некоторое число – ранг.

Для каждого физически измеряемого параметра оптимизации можно построить ранговый аналог. Потребность в построении такого аналога возникает, если имеющиеся в распоряжении исследователя численные характеристики неточны или неизвестен способ построения удовлетворительных численных оценок. При прочих равных условиях всегда нужно отдавать предпочтение физическому измерению, так как ранговый подход менее чувствителен и с его помощью трудно изучать тонкие эффекты.



*Например*, при покупке десерта целью процесса является покупка вкусного десерта. Необходимо выбрать количественный критерий, характеризующий степень достижения цели. Можно принять следующее решение: очень вкусный получает отметку 5, просто вкусный – отметку 4 и т.д.

Количественно оценить результат оптимизации позволяет ранговый подход, описанный выше, однако ранговый подход часто оказывается грубым, нечувствительным.

Другие примеры рангового подхода: определение чемпиона мира по фигурному катанию или гимнастике, дегустация вин, сравнение произведений искусства, сравнение продуктов по цвету, прозрачности, форме кристаллов.

*Требование к параметру оптимизации*: параметр оптимизации должен выражаться *одним числом*.

Иногда это получается естественно, как регистрация показания прибора (например, скорость движения машины определяется числом на спидометре), а иногда приходится производить некоторые вычисления.

*Требование к параметру оптимизации – однозначность* в статистическом смысле. Это требование связано с количественной природой параметра оптимизации. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно значение параметра оптимизации с учетом точности ошибки эксперимента. (Однако обратное неверно: одному и тому же значению параметра могут соответствовать разные наборы значений факторов). *Это требование является главным*, определяющим корректность постановки задачи.

Представление об эффективности не остается постоянным в ходе исследования. Оно меняется по мере накопления информации и в зависимости от достигнутых результатов. Это приводит к последовательному подходу при выборе параметра оптимизации. Так, например, на первых стадиях исследования технологических процессов в качестве параметра оптимизации часто используется выход продукта. Однако в дальнейшем, когда возможность повышения выхода исчерпана, нас

начинают интересоваться такие параметры, как себестоимость, чистота продукта и т.д.

Параметр оптимизации должен быть эффективным в статистическом смысле, т.е. его выбор определяется с наибольшей возможной точностью. Если и эта точность недостаточна, тогда приходится обращаться к увеличению числа повторных опытов.

*Требование к параметру оптимизации* – требование *универсальности* или *полноты*. Под универсальностью параметра оптимизации понимается его способность всесторонне характеризовать объект. В частности, технологические параметры оптимизации недостаточно универсальны: они не учитывают экономику. Универсальностью обладают, например, обобщенные параметры оптимизации, которые строятся как функции от нескольких частных параметров.

Необходимо выбирать параметр оптимизации, который имеет *физический смысл, простым и легко вычисляемым*.

Требование физического смысла связано с последующей интерпретацией результатов эксперимента. В отдельных случаях, несмотря на явный физический смысл, параметр оптимизации приходится преобразовывать, чтобы добиться его статистической эффективности (например, однородности дисперсии).

Второе требование часто также оказывается весьма существенным. Для процессов разделения термодинамические параметры оптимизации более универсальны. Однако на практике ими пользуются мало: их расчет довольно труден.

К выбору параметра оптимизации необходимо подходить тщательно, так как он в некоторой степени оказывает влияние на вид математической модели исследуемого объекта.

Экономические параметры, в силу их аддитивной природы, легче представляются простыми функциями, чем физико-химические показатели. Не случайно методы линейного программирования, основанные на простых моделях, получили широкое распространение именно в экономике. Температура плавления сплава является, как известно, сложной, многоэкстремальной характеристикой состава, тогда как стоимость сплава зависит от состава линейно.



### *Примеры однокритериальной однопараметрической задачи безусловной оптимизации*

Примером однокритериальной однопараметрической задачи безусловной оптимизации является расчет оптимального числа комбайнов в хозяйстве. Эта задача имеет вид  $F(x) \rightarrow \min$ .

Пусть требуется определить оптимальное число комбайнов  $N_{\text{опт}}$  в хозяйстве при следующих исходных данных: площадь хозяйства  $S(\text{га})$ , цена комбайна  $C_k(\text{руб.})$ , урожайность зерновых  $Y(\text{ц/га})$ , цена зерна  $C_z(\text{руб/ц})$ , суточная выработка одного комбайна  $W(\text{га/сут})$ .

Данная задача принадлежит к классу оптимизационных, что видно из следующих рассуждений.

Известно, что после наступления полной спелости зерно теряет свою связь с колосом и под действием ветра, дождя, а также ударов планок мотовила осыпается на землю. Это явление известно под названием «биологические потери» урожая. Установлено, что в среднем за сутки биологические потери урожая составляют 1% от первоначального; есть культуры, например овес и горох, средние биологические потери которых доходят до 2% в сутки, есть устойчивые к осыпанию сорта пшеницы, у которых потери равны 0,5% в сутки.

Рассмотрим постановку задачи оптимизации. Если урожай не убирается (число комбайнов  $N_k = 0$ ), то потери урожая  $\Pi$  равны стоимости урожая. С увеличением числа комбайнов сроки уборки сокращаются и, следовательно, сокращаются потери урожая, но растут затраты на уборку  $Z$ . Эти зависимости отображены графически на рис. 3.3.

В качестве целевой функции  $F(N_k)$  можно взять максимум прибыли, получаемой хозяйством. Можно показать, что максимуму прибыли соответствует минимум суммы затрат на уборку  $Z$  и потерь урожая  $\Pi$ , т.е.

$$F(N_k) = Z + \Pi \rightarrow \min.$$

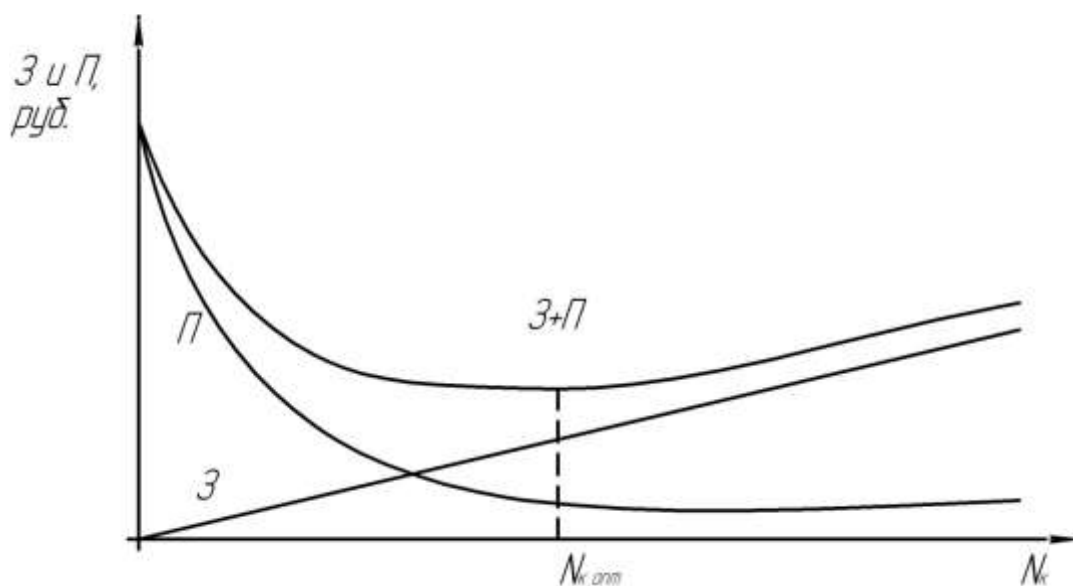


Рис. 3.3. Зависимости затрат на уборку  $Z$  и потерь урожая  $P$  от числа комбайнов  $N_k$

Конкретизируем целевую функцию, выразив ее через число комбайнов  $N_k$  в хозяйстве. Сначала выразим затраты на уборку через число комбайнов. Так как затраты на горючее, заработную плату и ремонт не зависят от числа комбайнов (они зависят от величины убираемой площади), то в затратах на уборку учитывается только переменная их часть, т. е. отчисления на амортизацию  $Z_a$  и затраты на хранение  $Z_{xp}$  комбайнов:

$$Z = Z_a + Z_{xp}.$$

В свою очередь,

$$Z_a = 0,01 \cdot a \cdot Ц_k \cdot N_k,$$

где  $a$  — годовые амортизационные отчисления для комбайнов ( $a = 8-10\%$ );

$$Z_{xp} = Z_x \cdot N_k,$$

где  $Z_x$  — затраты на хранение одного комбайна в год, руб.

Потери урожая определим по известной формуле:

$$P = 0,5 \cdot K_{п} \cdot УТ S^2 Ц_э,$$

где  $K_{п}$  — коэффициент интенсивности потерь урожая в сутки;  $K_{п} = (0,005-0,02)$ ; в среднем  $K_{п} = 0,01$  (1% в сутки);  $T$  — продолжительность уборки, сут.;  $T = S/(W_k N_k)$ ;  $W_k N_k$  — суточная выработка всех комбайнов.

Выражение для  $\Pi$  принимает вид:

$$\Pi = 0,5K_{\Pi}YS^2C_3/(W_k N_k).$$

С учетом этого целевая функция имеет вид:

$$F(N_k)=0,01 \cdot C_k \cdot N_k + 3_x \cdot N_k + 0,5 \cdot K_{\Pi} \cdot Y \cdot S^2 \cdot C_3 / (W_k \cdot N_k) \rightarrow \min.$$

Для определения точки минимума функции  $F(N_k)$  нужно приравнять нулю ее первую производную по  $N_k$  и вычислить корни:

$$F'(N_k)=0,01 \cdot a \cdot C_k + 3_x - 0,5 \cdot K_{\Pi} \cdot Y \cdot S^2 \cdot C_3 / (W_k \cdot N_k^2) = 0,$$

откуда

$$N_{\text{комб}} = S \sqrt{\frac{0,5 \cdot K_{\Pi} \cdot Y \cdot C_3 \cdot 100}{W_k (0,01 \cdot a \cdot C_k + 3_x)}}.$$

Предложенная методика определения оптимального числа комбайнов не учитывает ряд факторов, а именно: неодновременность созревания урожая на разных полях, разномарочность комбайнового парка, влияние погодных условий на уборку, колебания урожайности по годам и полям, применение одновременно двух способов уборки и др. Эти особенности могут быть учтены в более сложной модели, например имитационной.

*Задачи с несколькими выходными параметрами.* Задачи с одним выходным параметром имеют очевидные преимущества. Но на практике чаще всего приходится учитывать несколько выходных параметров. Иногда их число довольно велико. Так, например, при производстве резиновых и пластмассовых изделий приходится учитывать физико-механические, технологические, экономические, художественно-эстетические и другие параметры (прочность, эластичность, относительное удлинение, способность смеси прилипать к форме и т. д.). Математические модели можно построить для каждого из параметров, но одновременно оптимизировать несколько функций невозможно.

Обычно оптимизируется одна функция, наиболее важная с точки зрения цели исследования, при ограничениях, налагаемых другими функциями. Поэтому из многих выходных параметров выбирается

один в качестве параметра оптимизации, а остальные служат ограничениями. Всегда полезно исследовать возможность уменьшения числа выходных параметров. Для этого можно воспользоваться корреляционным анализом.

Корреляционный анализ предусматривает выявление или отсутствие связей между всевозможными парами параметров путем вычисления коэффициента парной корреляции, который является общепринятой в математической статистике характеристикой связи между двумя случайными величинами.

Диаграмма разброса (рассеивания) – инструмент, позволяющий определить вид и тесноту связи между парами соответствующих факторов.

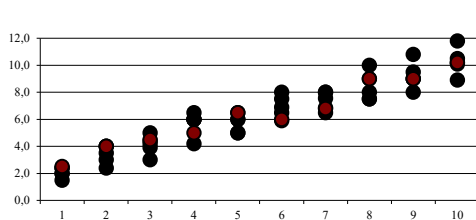
Диаграмма рассеивания дает возможность выдвинуть гипотезу о наличии или отсутствии корреляционной связи между двумя случайными величинами.

На рис. 3.4 показан пример прямой (положительной) связи (при увеличении  $X$  значения  $Y$  увеличиваются), а на рис. 3.5 – обратной (отрицательной) связи (при увеличении  $X$  значения  $Y$  уменьшаются). В этих случаях, управляя величиной  $X$ , можно получать требуемое значение  $Y$ .

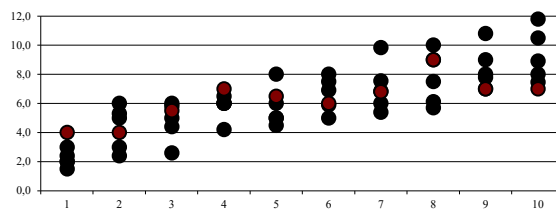
На рис. 3.4, *а* и 3.5, *а* точки расположены более тесно к гипотетической прямой линии, чем на рис. 3.4, *б* и 3.5, *б*, поэтому можно говорить о более сильной связи.

На рис. 3.6 показан пример, когда никакой выраженной зависимости между  $X$  и  $Y$  не наблюдается. В этом случае необходимо продолжить поиск факторов, влияющих на  $Y$ , исключив из этого поиска фактор  $X$ .

Между параметрами  $X$  и  $Y$  возможны также случаи нелинейной зависимости (рис. 3.7). Тогда диаграмму разброса можно разделить на участки, имеющие прямолинейный характер, и исследовать каждый участок в отдельности.

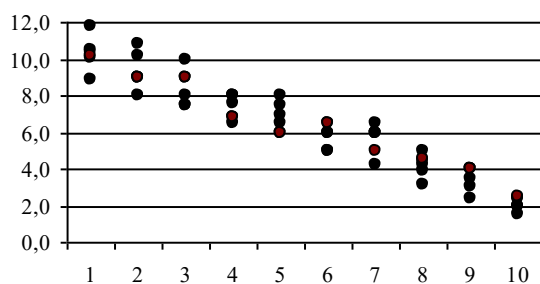


а)

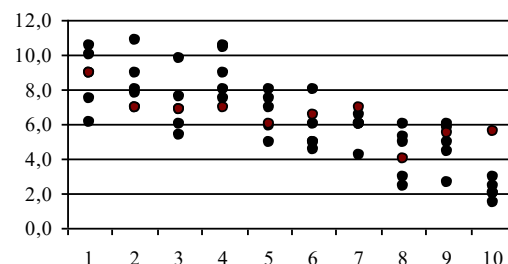


б)

Рис. 3.4. Прямо пропорциональная связь (положительная)



а)



б)

Рис. 3.5. Обратно пропорциональная связь (отрицательная)

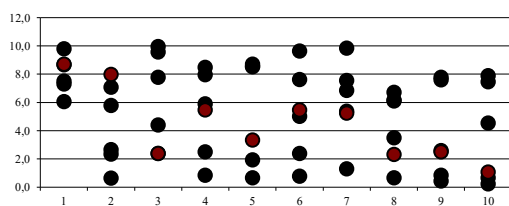


Рис. 3.6. Связь отсутствует

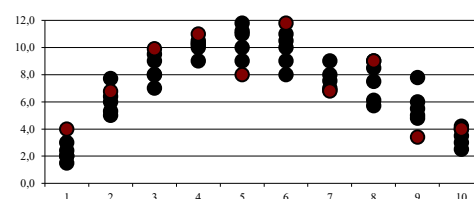


Рис. 3.7. Связь нелинейная

Если обозначить один параметр через  $y_1$ , а другой – через  $y_2$ , и число опытов, в которых они будут измеряться, через  $N$ , так, что  $u=1, 2, \dots, N$ , где  $u$  – текущий номер опыта, то коэффициент парной корреляции  $r$  вычисляется по формуле

$$r_{y_1 y_2} = \frac{\sum_{u=1}^N (y_{1u} - \bar{y}_1)(y_{2u} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{u=1}^N (y_{1u} - \bar{y}_1)^2 \sum_{u=1}^N (y_{2u} - \bar{y}_2)^2}}, \quad (3.1)$$

где

$$\bar{y}_1 = \sum_{u=1}^N y_{1u} / N \text{ и } \bar{y}_2 = \sum_{u=1}^N y_{2u} / N \text{ – средние арифметические} \quad (3.2)$$

соответственно для  $y_1$  и  $y_2$

Значения коэффициента парной корреляции могут лежать в пределах от  $-1$  до  $+1$ .

Если  $r = \pm 1$ , можно предположить наличие корреляционной зависимости, близкой к функциональной.

Если  $r = 0$ , можно предположить, что линейная корреляционная связь отсутствует, либо связь существенно нелинейная.

Чем ближе коэффициент корреляции к единице, тем теснее зависимость между параметрами. Принято считать, что:

при  $r \approx 0,3$  – слабая связь, при  $r = 0,3 - 0,7$  – средняя связь,  
при  $r \approx 0,7$  – сильная связь, при  $r \geq 0,9$  – весьма сильная связь.

Необходимо помнить, что коэффициент парной корреляции как мера тесноты связи имеет четкий математический смысл только при линейной зависимости между параметрами и в случае нормального их распределения.

Для проверки значимости коэффициента парной корреляции нужно сравнить его значение с табличным (критическим) значением. Для пользования таблицей нужно знать число степеней свободы  $f = N - 2$  и выбрать определенный уровень значимости, например, равный  $0,05$ . Такое значение уровня значимости называют еще  $5\%$ -м уровнем риска, что соответствует вероятности верного ответа при проверке нашей гипотезы  $P = 1 - \alpha = 0,95$ , или  $95\%$ . Это значит, что в среднем только в  $5\%$  случаев возможна ошибка при проверке гипотезы.

Проверка гипотезы сводится к сравнению абсолютной величины коэффициента парной корреляции с критическим значением. Если экспериментально найденное значение меньше критического, то нет оснований считать, что имеется тесная линейная связь между параметрами, а если больше или равно, то гипотеза о корреляционной линейной связи не отвергается.

При высокой значимости коэффициента корреляции любой из двух анализируемых параметров можно исключить из рассмотрения как не содержащий дополнительной информации об объекте исследования. Исключить можно тот параметр, который технически труднее измерять, или тот, физический смысл которого менее ясен. При плани-

ровании эксперимента целесообразно измерять все параметры, затем оценить корреляцию между ними и строить модели для их минимально возможного числа или же воспользоваться обобщенным параметром. Но бывают случаи, когда приходится рассматривать и коррелированные параметры.

### 3.2. Факторы. Требования, предъявляемые к факторам при планировании эксперимента. Выбор интервалов варьирования

*Фактор* ( $x_i$ ) – управляемая независимая переменная, соответствующая одному из возможных способов воздействия на объект исследования.

Множество возможных значений фактора  $x_i$  называется *областью его определения* (факторным пространством) (рис. 3.8).

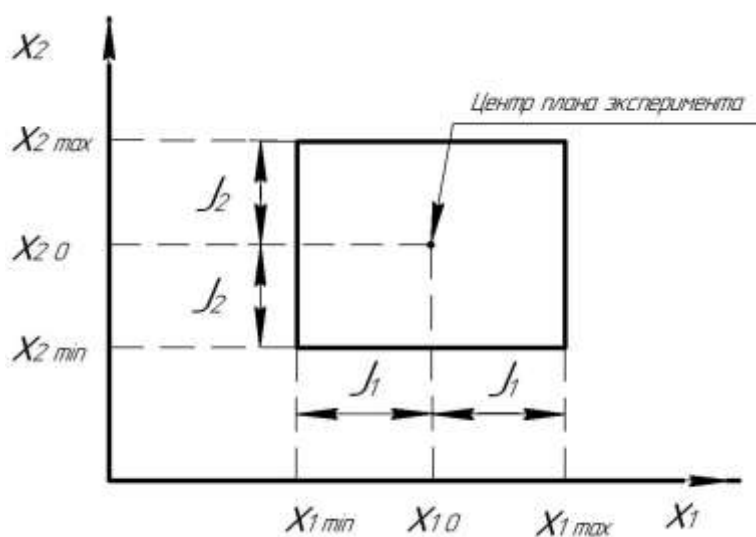


Рис. 3.8. Область определения факторов (при плане  $2^2$ )

Область определения может быть непрерывной и дискретной. Чаще всего в планировании экспериментов используются дискретные области определения, а для факторов с непрерывной областью определения (например, температура, время, количество вещества и т.п.) всегда выбираются дискретные множества уровней. В практических задачах области определения факторов, как правило, ограничены. Ограничения могут носить принципиальный либо технический характер.

Условно факторы можно разделить на качественные и количе-

ственные.

Качественные факторы можно измерять, взвешивать, титровать и т.п. Качественные факторы характеризуют разные вещества, разные технологические способы, аппараты, исполнители и т.д. Для них можно построить условную порядковую шкалу, которая ставит в соответствие уровням качественного фактора числа натурального ряда, т. е. производит кодирование. Порядок уровней может быть произволен, но после кодирования он фиксируется.

*Требования, предъявляемые к факторам  
при планировании эксперимента*

При планировании эксперимента факторы должны быть:

➤ *управляемыми* – т.е. экспериментатор, выбрав нужное значение фактора, может его поддерживать постоянным в течение всего опыта, т.е. управлять фактором. В этом состоит особенность «активного» эксперимента. Планировать эксперимент можно только в том случае, если уровни факторов подчиняются воле экспериментатора;

➤ *операциональными* – т.е. определение факторов должно представляться последовательностью действий (операций), с помощью которых устанавливаются их конкретные значения (уровни), что обеспечит также однозначное понимание фактора. С операциональным определением связаны выбор размерности фактора и точность его фиксирования;

➤ *с высокой степенью точности*, которая определяется диапазоном изменения факторов. При изучении процесса, который длится десятки часов, нет необходимости учитывать доли минуты, а в быстрых процессах необходимо учитывать доли секунды;

➤ *однозначными* – т.е. непосредственными воздействиями на объект. Трудно управлять фактором, который является функцией других факторов. Но в планировании могут участвовать сложные факторы, такие как соотношения между компонентами, их логарифмы и т.п.

При планировании эксперимента обычно одновременно изменяется несколько факторов. Поэтому очень важно сформулировать тре-



бования, которые предъявляются к совокупности факторов.

*Требования к совокупности факторов:*

➤ *совместимость* – т.е. все комбинации сочетания факторов осуществимы и безопасны. Несовместимость факторов может наблюдаться на границах областей их определения. Избавиться от нее можно сокращением областей. Положение усложняется, если несовместимость проявляется внутри областей определения. Одно из возможных решений – разбиение на подобласти и решение двух отдельных задач;

➤ *независимость* – т.е. возможность установления фактора на любом уровне вне зависимости от уровней других факторов (т.е. отсутствие корреляции между факторами). Требование некоррелированности не означает, что между значениями факторов нет никакой связи. Достаточно, чтобы связь не была линейной.

*Выбор основного уровня фактора.* Наилучшим условиям, определенным из анализа априорной информации, соответствует комбинация (или несколько комбинаций) уровней факторов. Каждая комбинация является многомерной точкой в факторном пространстве (см. рис. 3.8).

Для любого фактора  $x_i$  существует нулевой (средний), нижний  $x_{i\min}$  и верхний  $x_{i\max}$  уровни изменения значений.

*Уровни фактора* – выбранные для эксперимента количественные и качественные состояния фактора.

Нулевой или средний уровень фактора (нулевая точка или центр эксперимента):

$$x_{i0} = \frac{x_{i\max} + x_{i\min}}{2}, \quad (3.3)$$

где  $x_{i\min}, x_{i\max}, x_{i0}$  – соответственно нижний, основной (нулевой) и верхний уровни  $i$ -го фактора.

Построение плана эксперимента сводится к выбору экспериментальных точек, симметричных относительно нулевого уровня (рис. 3.9).

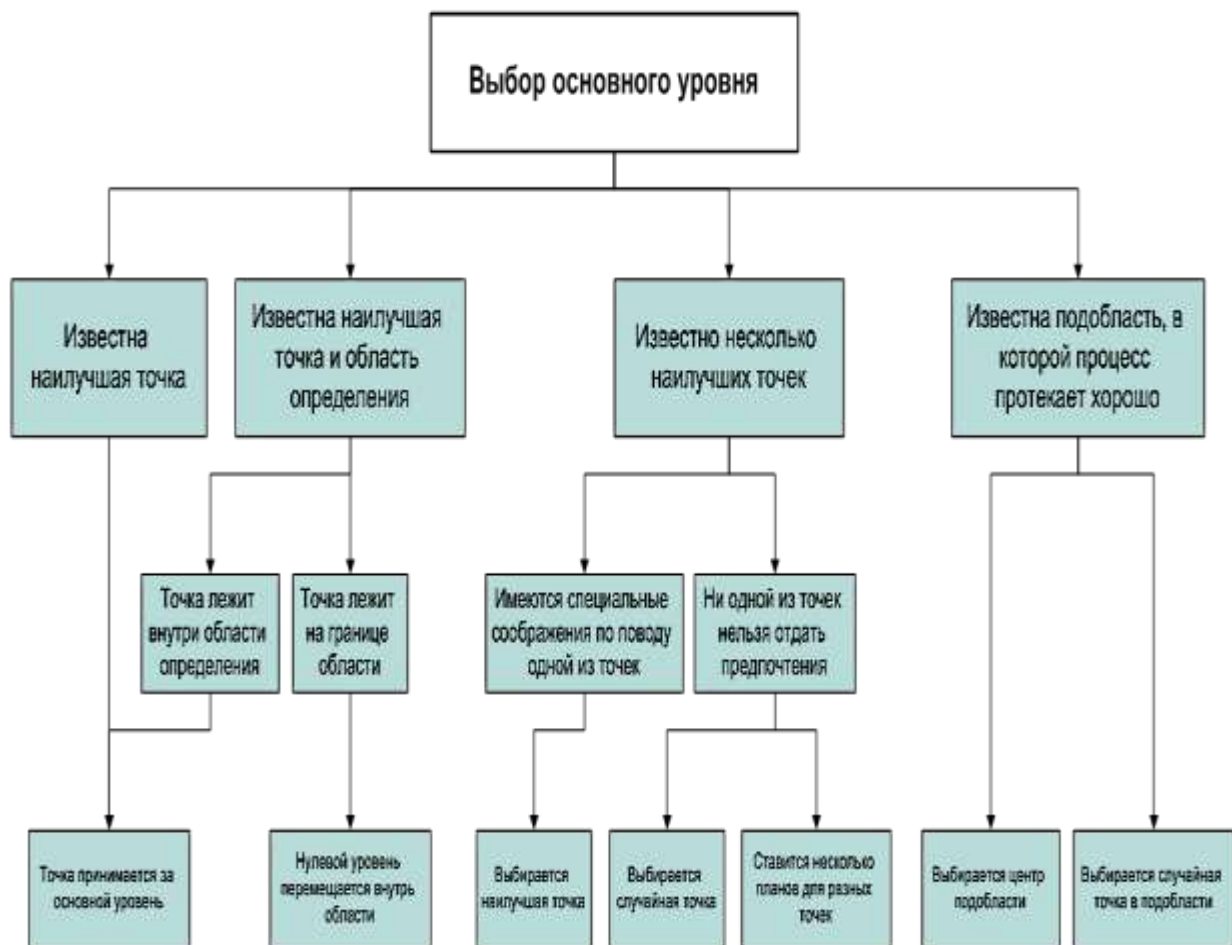


Рис. 3.9. Выбор основного уровня факторов

После того как нулевой уровень выбран, переходим к выбору интервалов варьирования.

*Выбор интервалов варьирования.* Под интервалом варьирования  $J_i$  подразумевается разность между двумя именованными его значениями, принятая за единицу при его кодировании (см. рис. 3.8).

Интервал варьирования определяется по формуле

$$J_i = \frac{x_{i\max} - x_{i\min}}{2}. \quad (3.4)$$

Верхний и нижний уровни факторов получают путем прибавления и вычитания из исходного уровня интервала варьирования.

На выбор интервалов варьирования накладываются естественные ограничения сверху и снизу. Интервал варьирования не может быть

меньше той ошибки, с которой экспериментатор фиксирует уровень фактора. Иначе верхний и нижний уровни окажутся неразличимыми. С другой стороны, интервал не может быть настолько большим, чтобы верхний или нижний уровни оказались за пределами области определения. Внутри этих ограничений обычно еще остается значительная неопределенность выбора, которая устраняется с помощью интуитивных решений.

Характеристики объектов экспериментальных исследований имеют различную физическую природу, а следовательно, и размерность, что затрудняет построение модели. Поэтому на практике значения факторов, которые имеют реальный физический смысл, нормируют (приводят к определенному ранее заданному набору значений). В планировании эксперимента значения факторов, соответствующие определенным уровням их варьирования, выражаются в кодированных величинах: +1 (верхний), -1 (нижний), основной - 0 (средний).

При планировании эксперимента преобразуют размерные управляемые независимые факторы  $x_i$  в безразмерные, нормированные  $x_{in}$ .

Алгоритм нормировки фактора:

- выбираем масштаб и положение осей координат таким образом, чтобы  $x_{imin}$  соответствовало -1, а  $x_{imax}$  +1;
- вычисляем значение  $x_{i0}$  для данного фактора (по формуле (3.4));
- вычисляем интервал изменения  $i$ -го фактора  $J_i$  (по формуле (3.3)).
- находим нормированное (кодовое) значение  $x_{in}$  для каждого  $i$ -го фактора по формуле

$$x_{in} = \frac{x_i - x_{i0}}{J_i}. \quad (3.5)$$

Графически переход от натуральных значений факторов к нормированным означает перенос осей координат факторного пространства в исходный уровень (рис. 3.10).

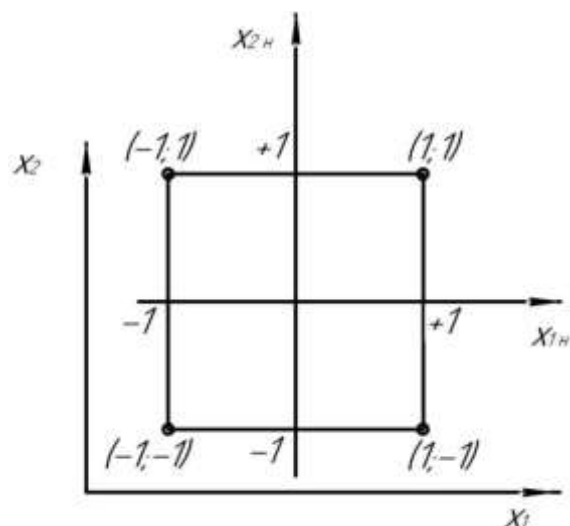


Рис. 3.10. Графически переход от натуральных значений факторов к нормированным означает перенос осей координат факторного пространства в исходный уровень

Выбор интервалов варьирования – задача трудная, так как она связана с неформализованным этапом планирования эксперимента. Возникает вопрос, какая априорная информация может быть полезна на данном этапе? Это – сведения о точности, с которой экспериментатор фиксирует значения факторов, о кривизне поверхности отклика и о диапазоне изменения параметра оптимизации. Обычно эта информация является ориентировочной (в некоторых случаях она может оказаться просто ошибочной), но это единственная разумная основа, на которой можно начинать планировать эксперимент. В ходе эксперимента ее часто приходится корректировать.

Точность фиксирования факторов определяется точностью приборов и стабильностью уровня в ходе опыта. Для принятия решений используется априорная информация о точности фиксирования факторов, кривизне поверхности отклика и диапазоне изменения параметра оптимизации. Каждое сочетание градаций перечисленных признаков определяет ситуацию, в которой нужно принимать решение.

Рассмотрим широкий, средний и узкий интервалы варьирования, а также случай, когда трудно принять однозначное решение. Размер интервала варьирования составляет некоторую долю от области определения фактора. Условно можно принять:

- если интервал составляет не более 10% от области определения – узким;
- не более 30% – средним;
- в остальных случаях – широким.

На рис. 3.11–3.13 представлены блок-схемы принятия решений при различных вариантах точности фиксирования факторов. На первой схеме (рис. 3.11) представлены девять ситуаций, имеющих место при низкой точности фиксирования факторов. При выборе решений учитывается информация о кривизне поверхности отклика и о диапазоне изменения параметра оптимизации. Типичное решение – широкий интервал варьирования. Узкий интервал варьирования совершенно не используется, что вполне понятно при низкой точности.

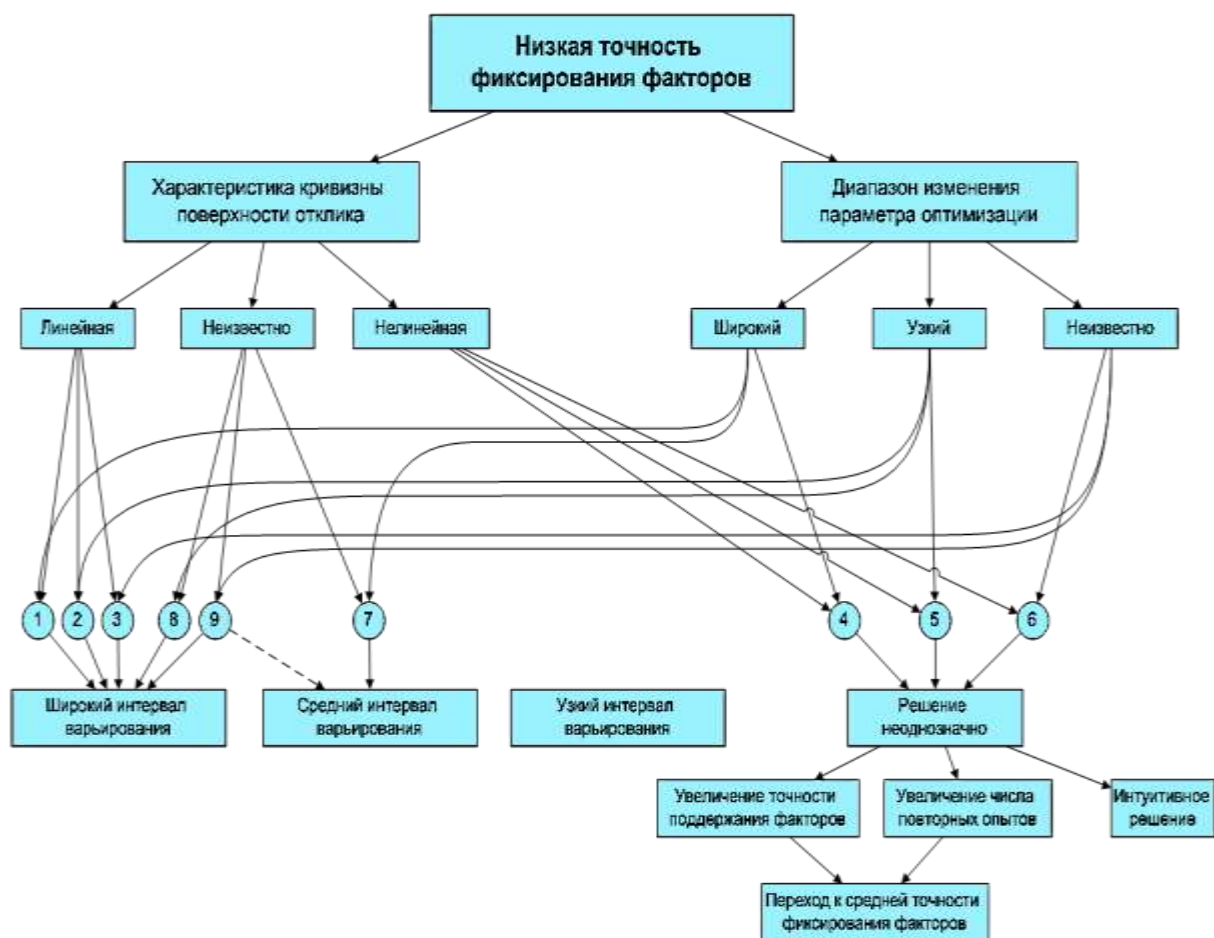


Рис. 3.11. Принятие решений при низкой точности фиксирования факторов

При выборе учитывается кривизна поверхности отклика и диапазон изменения параметра оптимизации. Стрелка, выходящая из

кружочка, указывает решение. Низкая точность фиксирования факторов приводит к отказу от выбора узкого интервала варьирования, иначе результаты могут оказаться неразличимыми. Средний интервал варьирования в этой схеме выбирается дважды, причем в девятой ситуации как редко применяемая альтернатива. Здесь отсутствует информация об обоих признаках, и выбор широкого интервала представляется более естественным.

Наибольшие трудности возникают, когда поверхность отклика нелинейна. Появляется противоречие между низкой точностью фиксирования факторов и кривизной. Первая требует расширения интервала, а вторая – сужения. Решение оказывается неоднозначным. Как поступить? Приходится рассматривать дополнительные рекомендации (рис. 3.12)). Прежде всего нужно выяснить, нельзя ли увеличить точность эксперимента либо за счет инженерных решений, либо за счет увеличения числа повторных опытов. Если это возможно, то решения принимаются на основе блок-схемы (см. рис. 3.12) для средней точности фиксирования факторов. Если это невозможно, то для принятия решения нет достаточных оснований и оно становится интуитивным.

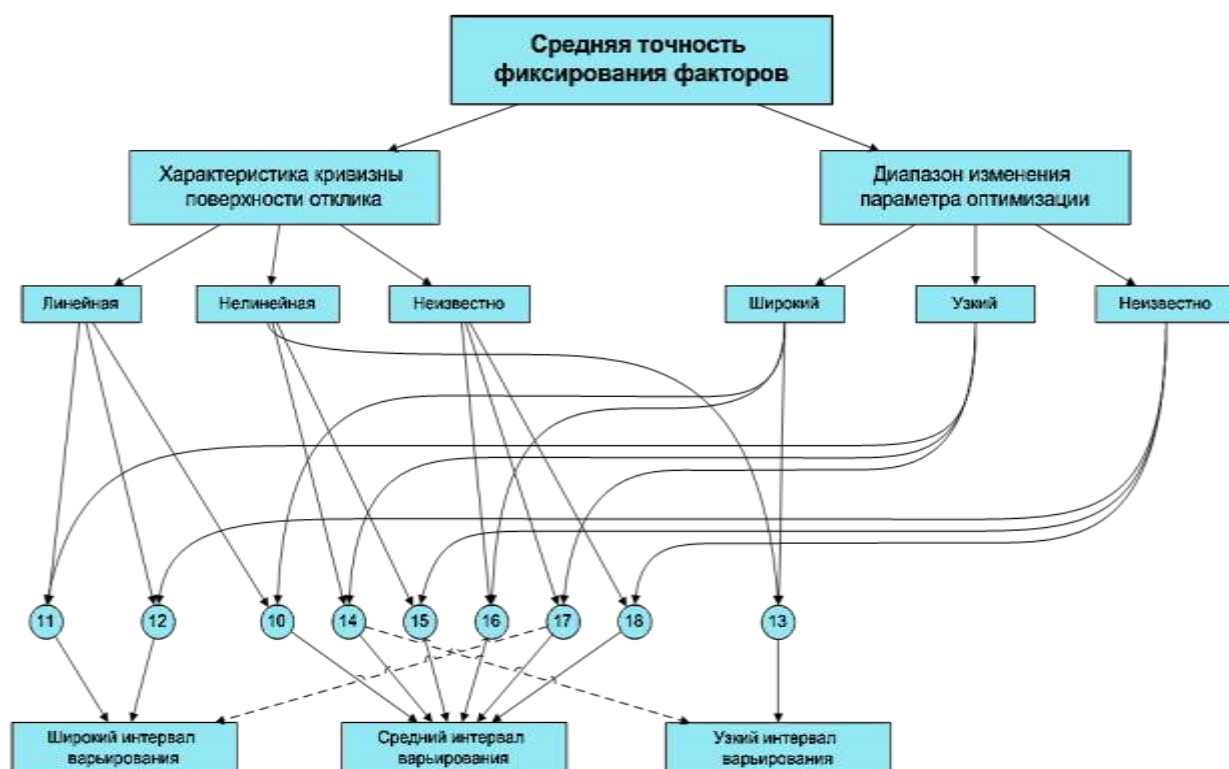


Рис. 3.12. Принятие решений при средней точности фиксирования факторов

Эта блок-схема, как и последующие, служит весьма грубым приближением к действительности. На практике учитывается еще масса обстоятельств. Например, решения, принимаемые по каждому фактору в отдельности, корректируются при рассмотрении совокупности факторов.

На рис. 3.12 изображена блок-схема для случая средней точности фиксирования факторов.

Характерен выбор среднего интервала варьирования. Лишь в случае нелинейной поверхности и широкого диапазона рекомендуется узкий интервал варьирования. При сочетаниях линейной поверхности с узким диапазоном и отсутствием информации о диапазоне выбирается широкий интервал варьирования. Пунктиром, как и выше, показаны редко применяемые альтернативы.



Рис. 3.13. Принятие решений при высокой точности фиксирования факторов

На рис. 3.13 построена блок-схема для случая высокой точности фиксирования фактора. Сочетание высокой точности с нелинейностью поверхности всегда приводит к выбору узкого интервала. Довольно ча-

сто выбирается средний интервал и лишь в двух случаях широкий. В обеих последних блок-схемах отсутствуют неоднозначные решения.

Итак, вооружившись умением выбирать основной уровень и интервалы варьирования факторов, мы готовы приступить к построению плана проведения эксперимента.

*Пример.* Выбор факторов и их уровней рассмотрим на примере исследований пневматического аппарата для одновременного высева семян кукурузы и сорго в один рядок (см. рис. 2.7).

Поскольку в экспериментальном высевающем аппарате (см. рис. 2.7) происходят два самостоятельных процесса высева семян двух культур, в которых некоторые факторы являются общими для обоих процессов, то при ранжировании факторов они были разделены на три группы:

- факторы, влияющие только на процесс высева семян кукурузы (10 факторов);
- факторы, влияющие только на процесс высева семян сорго (23 фактора);
- факторы, общие для обоих процессов (3 фактора).

*Общими факторами* для обоих процессов являются:  $x_1$  – частота вращения высевающего диска;  $x_2$  – величина разрежения в вакуумной камере аппарата.

В состав варьируемых факторов вошли:  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Выбор уровней и интервалов варьирования указанных факторов производился с учетом реальных условий эксплуатации и результатов теоретических и предварительных исследований.

Результаты работы по выбору основных факторов, уровней и интервалов их варьирования представлены в табл. 3.1.



Таблица 3.1

## Основные факторы и уровни их варьирования (пример)

Наименование процесса	Наименование фактора	Обозначение	Уровни факторов			Интервал варьирования
			основной (0)	нижний (-1)	верхний (+1)	
Высев семян кукурузы	$\omega_0$ - угловая скорость вращения высевающего диска, рад/с	$x_1$	3	2	4	1
	$p$ - величина разрежения в вакуумной камере высевающего аппарата, кПа	$x_2$	3	2	4	1
	$z$ - зазор между перегородкой и присасывающим отверстием, мм	$x_3$	0	-1,5	+1,5	1,5
Высев семян сорго	$\omega_0$ - угловая скорость вращения высевающего диска, рад/с	$x_1$	3	2	4	1
	$p$ - величина разрежения в вакуумной камере высевающего аппарата, кПа	$x_2$	3	2	4	1
	$b_n$ - ширина перемычки между отверстиями пульсатора, мм	$x_3$	1,8	1,2	2,4	0,6

## 3.3. Выбор математической модели

*Математическая модель* – это совокупность математических объектов (чисел, символов, множеств и т. д.) и связей между ними, отражающая важнейшие для исследователя свойства изучаемого объекта.

Существуют два способа получения математической модели объекта: теоретический (аналитический) и экспериментальный. В первом случае исследователь строит модель на основе известных ему представлений об объекте моделирования с использованием законов и правил математики, логики, физики и других наук. При втором способе математическую модель объекта получают с помощью эксперимента. Обычно это – уравнение (система уравнений), связывающее выходные и входные параметры объекта, например потери зерна за зерноуборочным комбайном как функция подачи хлебной массы в комбайн.

К математическому моделированию в технике прибегают в тех случаях, когда опыта и интуиции проектировщика недостаточно для принятия решения, а также при решении задач, требующих больших объемов вычислений.

В технике широко применяется и другой вид моделирования – физическое макетирование объектов в уменьшенном или упрощенном виде. У физического и математического моделирования есть свои преимущества и недостатки. Преимуществами математического моделирования является отсутствие затрат на изготовление физических макетов, возможность проведения практически неограниченного числа экспериментов, в том числе на критических режимах, которые привели бы к разрушению физического макета. Вместе с тем в ряде случаев затраты на создание адекватной математической модели могут превосходить затраты на макетирование, а достоверность результатов математического моделирования часто зависит от принимаемых допущений и неизвестных коэффициентов математической модели.

В планировании эксперимента под моделью будем понимать вид функции отклика  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ .

Выбрать модель – значит выбрать вид этой функции, записать ее уравнение, спланировать и провести эксперимент для оценки численных значений констант (коэффициентов) этого уравнения.

Для выбора модели необходимо сначала построить геометрический аналог функции отклика – поверхность отклика (см. рис. 1.8). Каждому состоянию «ящика» будет соответствовать точка на плоскости.

Размерность факторного пространства зависит от числа факторов. При многих факторах поверхность отклика уже нельзя изобразить наглядно и приходится ограничиваться только алгебраическим языком.

Для двух факторов можно даже не переходить к трехмерному пространству, а ограничиться плоскостью. Для этого достаточно произвести сечение поверхности отклика плоскостями, параллельными плоскости  $X_1OX_2$ , и полученные в сечениях линии спроектировать на эту плоскость (рис. 3.14). Так строят, например, изображения гор и морских впадин на географических картах.

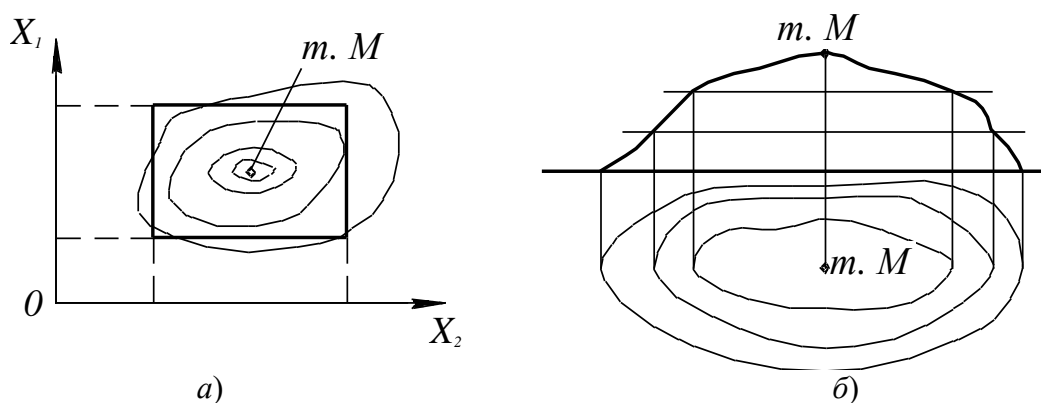


Рис.3.14. Проекция сечений поверхности отклика на плоскость:  
 а – поверхность отклика, полученная путем проекции сечений на плоскость;  
 б – получение замкнутых кривых путем проекции сечений  
 (изображение гор и впадин на картах)

Точка М на рисунке – это и есть та оптимальная точка, которую мы ищем. Каждая линия соответствует постоянному значению параметра оптимизации. Такая линия называется *линией равного отклика*. Существует соответствие между состоянием «ящика» и значением параметра оптимизации: каждому возможному состоянию «ящика» соответствует одно значение параметра оптимизации. Однако обратное неверно: одному возможному значению параметра оптимизации может соответствовать и одно, и несколько, и сколько угодно состояний «ящиков».

Существует большое количество моделей и их видов. Главное требование к модели – это способность предсказывать направление дальнейших опытов с требуемой точностью во всех возможных направлениях.

Модель должна быть *адекватной*, т.е. предсказанное с помощью модели значение отклика не должно отличаться от фактического больше, чем на некоторую заранее заданную величину. Проверка выполнимости этого требования называется *проверкой адекватности модели*. Разработаны специальные статистические методы, с помощью которых проверяется адекватность.

Если несколько различных моделей отвечают нужным требованиям, то следует предпочесть ту из них, которая является самой простой.

Если рассмотреть логарифмическую функцию (рис. 3.15), на не-

котором отрезке  $[x_{min}, x_{max}]$  она с удовлетворительной точностью описывается двумя уравнениями:  $y = \log bx$  и  $y = bx$ .

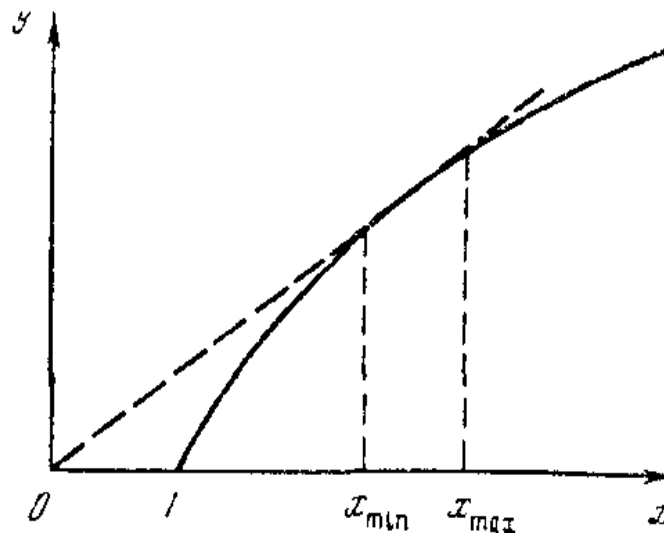


Рис. 3.15. График логарифмической функции

Во втором уравнении  $b$  — коэффициент, который мы можем оценить, например, по результатам эксперимента. Какое из уравнений, по вашему мнению, проще?

Простота — вещь относительная. Если вы заранее не сформулируете точно, что называется простым, а что сложным, то невозможно произвести выбор.

На будущее мы договоримся, что при прочих равных условиях мы всегда будем предпочитать степенные ряды. Точнее, отрезки степенных рядов — алгебраические полиномы. При таком соглашении можно сказать, что второе уравнение проще.

Выбрать модель — значит сравнить. А как сравнить между собой классы моделей, если свойства объекта заранее не известны? Остаётся предполагать, что должны рассматриваться такие задачи, в которых исходные постулаты окажутся верными.

Выбранные в качестве математических моделей полиномы будут различаться по максимальным степеням входящих в них переменных:

полином нулевой степени –  $y = b_0$ ;

полином первой степени –  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ ;

полином второй степени –  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$ ;

полином третьей степени –  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 +$   
 $+ b_{112}x_1^2x_2 + b_{122}x_1x_2^2 + b_{111}x_1^3 + b_{222}x_2^3$ ;

*Полиномиальные модели.* При планировании экспериментов неизвестную нам функцию отклика заменяют полиномом. Операция замены одной функции другой, в каком-то смысле эквивалентной функцией, называется *аппроксимацией*, т. е. при планировании экспериментов неизвестную функцию аппроксимируют полиномом.

Но полиномы бывают разных степеней. Поэтому важно выбрать степень полинома на первом шаге планирования эксперимента.

Эксперимент нужен только для того, чтобы найти численные значения коэффициентов полинома. Поэтому чем больше коэффициентов, тем больше опытов окажется необходимым. А мы стремимся сократить их число. Надо найти такой полином, который содержит меньше коэффициентов, но удовлетворяет требованиям, предъявленным к модели. Чем ниже степень полинома при заданном числе факторов, тем меньше в нем коэффициентов.

Мы хотим, чтобы модель хорошо предсказывала направление наискорейшего улучшения параметра оптимизации. Такое направление называется *направлением градиента*. Ясно, что движение в этом направлении приведет к успеху быстрее, чем движение в любом другом направлении (это значит, что будет достигнута экономия числа опытов).

Градиент функции представляет собой вектор, показывающий наискорейшее изменение функции, величина и направление которого определяются по формуле

$$\overrightarrow{grad} y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \vec{j} + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_k} \vec{k}, \quad (3.6)$$

где  $y$  – выход эксперимента;  $x_k$  – переменные факторы;  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы по соответствующим координатам.

Наиболее просто значение производной может быть оценено как отношение приращения функции к приращению отдельных факторов

при реализации двух экспериментов, поставленных в окрестностях исходной точки факторного пространства: пробного и рабочего опытов, например, в направлении фактора  $x_1$ . Тогда  $\frac{\partial y}{\partial x_1} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x_1}$ .

Ставя последовательно несколько опытов вокруг пробной точки, определяют составляющие градиента по осям факторного пространства, т.е. направление движения к оптимуму. Кроме того, задаются величиной рабочего шага при этом движении.

$$\vec{x}_{h+1} = \vec{x}_h + P_h \cdot \left( \frac{\Delta y}{\Delta x_1} + \frac{\Delta y}{\Delta x_2} + \dots + \frac{\Delta y}{\Delta x_h} \right), \quad (3.7)$$

где  $P$  – параметр рабочего шага;  $h$  – номер шага.

Геометрическая интерпретация движения к оптимуму методом градиента представлена на рис. 3.16.

Как вы думаете, можно ли в этой связи всегда использовать полином первой степени?

С одной стороны, он содержит информацию о направлении градиента, с другой – в нем минимально возможное число коэффициентов при данном числе факторов. Единственное опасение в том, что неясно, будет ли линейная модель всегда адекватной.

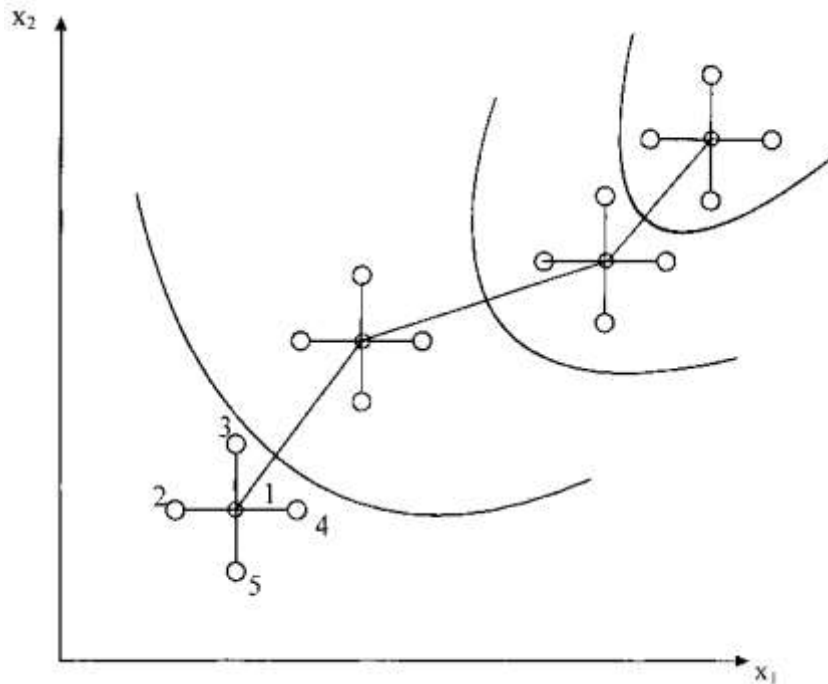


Рис.3.16. Схема движения к оптимуму методом градиента (цифры на точках – номера опытов)

Вопрос в том, как выбрать подобласть в факторном пространстве, чтобы линейная модель оказалась адекватной. Условие аналитичности функции отклика гарантирует эту возможность. Всегда существует такая окрестность любой точки (точнее, почти любой точки), в которой линейная модель адекватна. Размер такой области заранее не известен, но адекватность можно проверять по результатам эксперимента. Значит, выбрав сначала произвольную подобласть, мы рано или поздно найдем ее требуемые размеры. И как только это случится, воспользуемся движением по градиенту.

На следующем этапе будем искать линейную модель уже в другой подобласти. Цикл повторяется до тех пор, пока движение по градиенту не перестанет давать эффект. Это значит, что мы попали в область, близкую к оптимуму. Такая область называется «почти стационарной». Здесь линейная модель уже не нужна. Либо попаданием в почти стационарную область задача решена, либо надо переходить к полиномам более высоких степеней, например второй степени, чтобы подробнее описать область оптимума.

Удачный выбор подобласти имеет большое значение для успеха всей работы. Он связан с интуитивными решениями, которые принимает экспериментатор на каждом этапе.

Кроме задачи оптимизации, иногда возникает задача построения интерполяционной модели. В этом случае нас не интересует оптимум. Просто мы хотим предсказывать результат с требуемой точностью во всех точках некоторой заранее заданной области.

Тут не приходится выбирать подобласть. Необходимо последовательно увеличивать степень полинома до тех пор, пока модель не окажется адекватной. Если адекватной оказывается линейная или неполная квадратная модель (без членов, содержащих квадраты факторов), то ее построение аналогично тому, что требуется для оптимизации.

## *Принятие решений перед планированием эксперимента*

Все действия исследователя перед проведением эксперимента можно условно выделить в следующие этапы.

– *Оценка границ областей определения факторов при выборе области эксперимента.*

При этом должны учитываться ограничения нескольких типов:

– *первый тип* – принципиальные ограничения для значений факторов, которые не могут быть нарушены ни при каких обстоятельствах. Например, если фактор – температура, то нижним пределом будет абсолютный нуль;

– *второй тип* – ограничения, связанные с технико-экономическими соображениями, например, со стоимостью сырья, дефицитностью отдельных компонентов, временем ведения процесса;

– *третий тип* – ограничения, определяющиеся конкретными условиями проведения процесса, например существующей аппаратурой, технологией, организацией. В реакторе, изготовленном из некоторого материала, температуру нельзя поднять выше температуры плавления этого материала или выше рабочей температуры данного катализатора.

– *Тщательный анализ априорной информации.*

Априорную информацию используют для получения представления о параметре оптимизации, о факторах, о наилучших условиях ведения процесса и характере поверхности отклика, т.е. о том, как сильно меняется параметр оптимизации при небольших изменениях значений факторов, а также о кривизне поверхности. Для этого можно использовать графики (или таблицы) однофакторных экспериментов, осуществлявшихся в предыдущих исследованиях или описанных в литературе.

– *Определение локальной подобласти для планирования эксперимента.* Процедура выбора этой подобласти включает два этапа: выбор основного уровня и выбор интервалов варьирования.



Для успешного выбора основного (нулевого), а также наибольшего и наименьшего уровней факторов необходимо учитывать априорную информацию о точности фиксирования факторов, погрешность параметра оптимизации, интенсивность влияния того или иного фактора на выход.

При выборе диапазона варьирования отобранных факторов начинают с назначения основного уровня (центра экспериментального плана). При оптимизационных задачах в качестве него выбирают оптимум выходного параметра, а первоначальный интервал варьирования факторов выбирают небольшим. Это позволяет получать линейные модели и выработать стратегию пошагового движения к оптимуму.

При интерполяционном характере экспериментальных задач стараются как можно больше расширить диапазон варьирования. При этом, как правило, получаются нелинейные регрессионные модели.

В зависимости от соотношения интервал варьирования – область определения фактора, различают узкий – 0,0, средний – 0,3 и широкий – более 0,3 интервалы.

Необходимое число уровней факторов выбирают в общем случае в зависимости от кривизны поверхности отклика в факторном пространстве. Необходимо помнить, что количество уровней фактора влияет на порядок полиномиальной модели, а количество опытов зависит от количества уровней и количества факторов эксперимента.

## 4. ПЛАНИРОВАНИЕ ОДНОФАКТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Если исследуется влияние одного фактора на изучаемый объект (одна независимая переменная), то такой эксперимент называется *однофакторным*.

Однофакторными считаем экспериментальные исследования, когда варьируем только одним из переменных факторов, а если их несколько, то изменение их уровней осуществляем поочерёдно.

Ниже рассмотрены несколько типов однофакторных экспериментов. Классическим называют наиболее старый метод планирования и реализации экспериментов. Он предусматривает фиксирование на определённых уровнях всех переменных факторов, кроме одного, который принимает некоторые дискретные значения (уровни) в исследуемой части области своего существования. В результате находим зависимость исследуемой величины (параметра выхода) только от одного фактора. Математическая модель этой зависимости может быть получена в результате ряда геометрических построений или, чаще всего и с гораздо меньшей погрешностью, методом наименьших квадратов.

Поскольку этот метод не определяет структуру получаемой однофакторной модели и требует наличия перенасыщенной системы уравнений (число уравнений превышает число неизвестных) для вычисления параметров, на количество уровней переменного фактора налагаются определённые ограничения.

Если выход изменяется по закону, близкому к линейному, то для нахождения параметров линейной модели достаточно трёх точек на линии отклика, т. е. достаточно варьировать переменный фактор на трёх дискретных уровнях. Однако вид линии отклика экспериментатору зачастую неизвестен. В этом случае естественное стремление сократить объём экспериментов вступает в противоречие с последующей возможностью функциональной или графической интерпретации их результатов. Последние могут подчиняться более сложному закону (например, квадратичному) с большим числом параметров. Это обстоятельство заставляет планировать однофакторный эксперимент как минимум на четырёх уровнях переменного фактора. А при имеющейся

опасности срыва одного из опытов необходимо предусмотреть пятую резервную точку.

Следует отметить, что если нелинейную экспериментальную зависимость линеаризовать логарифмированием (отложив на графике в логарифмическом масштабе), то можно для аппроксимации экспериментальных результатов использовать степенную или показательную функции.

Например, из

$$y = ab^x \quad (4.1)$$

имеем  $\lg y = \lg a + x \lg b$ , что эквивалентно линейной зависимости  $Y = A + xB$  при оперировании не самим результатом эксперимента, а его логарифмом.

Вычисления по определению параметров модели методом наименьших квадратов удобно выполнять в виде таблицы (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Вычисление параметров модели

№ п/п	x	x <sup>2</sup>	y	x·y	x <sup>3</sup>	x <sup>4</sup>	x <sup>2</sup> y
1	2	3	4	5	6	7	8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	Σx	Σx <sup>2</sup>	Σy	Σx·y	Σx <sup>3</sup>	Σx <sup>4</sup>	Σx <sup>2</sup> y

Для линейной модели  $y = ab^x$  (достаточно столбцов 1–5) имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} bN + a\Sigma x = \Sigma y; \\ b\Sigma x + a\Sigma x^2 = \Sigma xy, \end{cases} \quad (4.2)$$

решая которую, находим параметры модели «a» и «b».

Квадратичная модель  $y = ax^2 + bx + c$  требует следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} a\Sigma x^2 + b\Sigma x + cN = \Sigma y; \\ a\Sigma x^3 + b\Sigma x^2 + c\Sigma x = \Sigma xy; \\ a\Sigma x^4 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^2 = \Sigma x^2 y. \end{cases} \quad (4.3)$$

Критерием выбора той или иной модели является погрешность аппроксимации.

Мерой оценки рассеяния параметра выхода является дисперсия воспроизводимости – средняя дисперсия всех опытов.

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^n (y_u - \bar{y})^2}{N(n-1)}, \quad (4.4)$$

где  $u$  – количество параллельных опытов ( $1 \dots n$ );  $i$  – количество уровней переменного фактора (точек на кривой отклика) ( $1 \dots N$ );  $\bar{y}$  – среднее значение выхода из серии параллельных опытов.

В однофакторных экспериментах дисперсия коэффициентов модели, полученных методом наименьших квадратов, равна

$$S_b^2 = \frac{S_y^2}{2}. \quad (4.5)$$

Эта дисперсия позволяет оценить значимость коэффициентов модели.

Проведя необходимое для исследуемого объекта число однофакторных экспериментов, получим набор частных однофакторных моделей. Их можно объединить в общую многофакторную модель.

Основное достоинство изложенного метода – это его простота. Он может быть рекомендован для исследования простейших объектов и построения тарифовочных зависимостей.

К недостаткам метода можно отнести следующие:

- значительные затраты времени (большое число опытов);
- неэкономичность;
- наличие систематических ошибок;
- отсутствие учёта смешанных взаимодействий.

Совершенствование экспериментальных методик пошло по нижеисследуемым направлениям.

Для компенсации первого и второго недостатков были разработаны устройства, позволяющие вести эксперименты одновременно при разных значениях факторов.

Для повышения точности (третий недостаток) увеличивали количество параллельных опытов. Минимальное число параллельных опытов равно трём.

Наконец, для компенсации четвертого недостатка были разрабо-

таны более сложные планы при одновременном изменении нескольких факторов, т. е. многофакторные.

*Пример 1.* Методику проведения однофакторного эксперимента рассмотрим на примере исследований пневматического аппарата для одновременного высева семян кукурузы и сорго в один рядок (рис. 4.1).

Исследовался процесс высева семян кукурузы пневматическим высевающим аппаратом и пути его совершенствования.

Для оценки степени влияния факторов на процесс высева семян кукурузы в качестве показателя была принята средняя подача семян 600 ячейками, что соответствовало 40 оборотам высевающего диска или 10 оборотам приводной цепи.

Средняя подача семян кукурузы определялась по формуле

$$П_{ср} = \frac{N_{\phi}}{600}, \text{ шт}, \quad (4.6)$$

где  $N_{\phi}$  – фактическое число высеянных семян кукурузы за 40 оборотов диска, шт.

Опыты проводились в трехкратной повторности. Исследования проводились при зафиксированном положении перегородки семенных камер на расстоянии 58 мм от дна корпуса аппарата, при постоянном значении разрежения в вакуумной камере аппарата, равном 3 кПа, и изменении угловой скорости высевающего диска от 2 до 4 рад/с (19...38 об/мин).

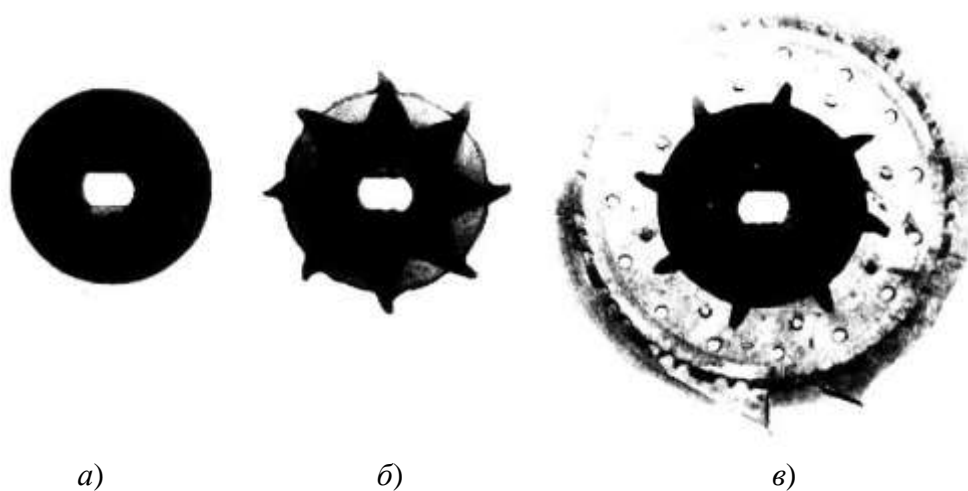


Рис. 4.1. Конструктивные варианты ворошилок семян кукурузы:  
а – серийная ворошилка без усиков; б – серийная ворошилка с усиками;  
в – экспериментальная штифтовая ворошилка

В процессе исследований высевающего аппарата проводились опыты по определению влияния ворошилки на процесс высева семян кукурузы в различных вариантах ее конструктивного исполнения, представленных на рис. 4.1. На основании полученных экспериментальных данных построены графики (рис. 4.2).

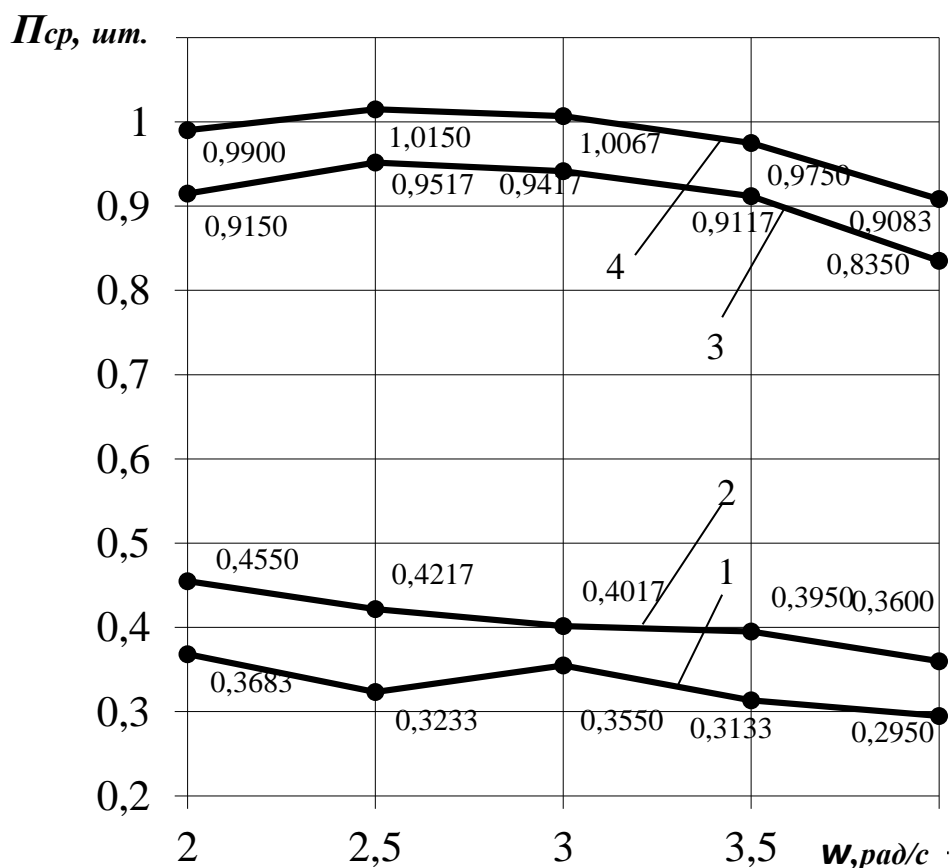


Рис. 4.2. Влияние конструкции ворошилки на высева семян кукурузы:  
 Конструктивное исполнение ворошилки семян кукурузы:  
 1 – без ворошилки; 2 – заводская без усиков;  
 3 – заводская с усиками; 4 – штифтовая

Анализ графиков, представленных на рис. 4.2 показывает, что при наличии у ворошилки рыхлящих (сводоразрушающих) элементов (усиков, штифтов) их эффективность тем выше, чем больше сводоразрушающие действия этих элементов (графики 3 и 4 рис. 4.2). В то же время сравнение графиков 2 и 1, а также графиков 2 и 4 дают основания для утверждения о несостоятельности гипотезы, предполагающей, что ворошилка заводского изготовления создает в процессе высева

подпор семян в активном слое посевного материала, непосредственно прилегающего к высеваящему диску.

*Пример 2.* Рассмотрим методику планирования, организации и проведения однофакторного эксперимента на примере определения коэффициента трения семян пропашных культур о поверхности разных видов, с последующей статистической обработкой полученных экспериментальных данных.

В качестве лабораторной установки для проведения экспериментов использовалось устройство для автоматизированного определения коэффициентов трения семян (рис. 4.3) с шаговым двигателем и поворотным механизмом (на рисунке не показаны), позволяющее проводить исследования в различных вариантах путем смены рабочих поверхностей разных видов (металл и 3 вида полимерных соединений) и различных типов семенного материала (семена кукурузы, подсолнечника, сорго и гороха).

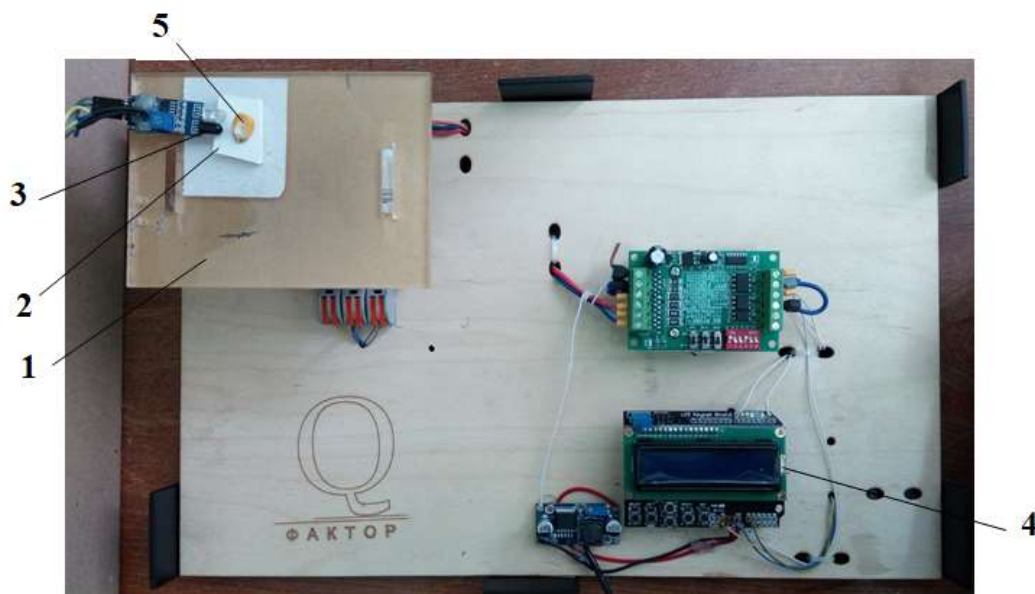


Рис. 4.3. Устройство для автоматизированного определения коэффициентов трения семян: 1 – рабочий стол; 2 – исследуемая поверхность; 3 – датчик движения; 4 – блок управления и мониторинга с индикационной панелью; 5 – семя исследуемой пропашной культуры

Материалами фрикционной поверхности, по которым определялись коэффициенты трения кукурузы, были: металлопластиковая (металлополимерная) труба valtes, труба армированная стекловолокном политек ppr 80 sdr 11, ABS пластик (материал для 3D-принтера).

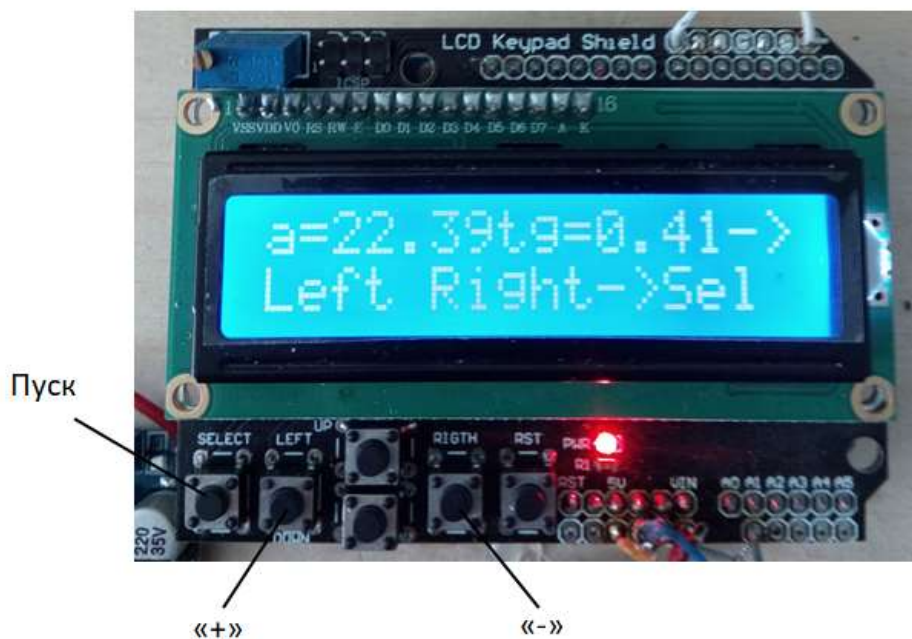


Рис. 4.4. Блок управления и мониторинга с индикационной панелью

По разработанной методике (см. методические указания к практическим занятиям) необходимо провести серию экспериментов по определению коэффициента трения покоя по 50 значений с трехкратной повторностью ( $m=3$ ) каждого типа семян о поверхность различных видов. Все 150 значений (одного эксперимента) записать в таблицу результатов проведенных экспериментов (табл. 4.2). Для простоты расчетов обозначим  $f_{cm}$  через  $x_i$ .

Таблица 4.2

#### Экспериментальные данные

Тип поверхности	Тип семени	Значения коэффициентов трения покоя семян о рабочую поверхность по сериям экспериментов ( $f_{cm}$ )			Среднее значение коэффициентов трения покоя семян о рабочую поверхность, $\bar{x}_i$
		$m=1$	$m=2$	$m=3$	
1	2	3	4	5	6
		$x_1$	$x_1$	$x_1$	$\bar{x}_1$
		$x_i$	$x_i$	$x_i$	$\bar{x}_i$
		.....	.....	.....	
		.....	.....	.....	
		$x_{50}$	$x_{50}$	$x_{50}$	$\bar{x}_{50}$



Приведем результаты одного типа эксперимента – на семенах кукурузы. На основе проведённых опытов по определению коэффициента трения семян кукурузы о поверхность (ABS пластик (материал для 3D-принтера)) определили среднее значение коэффициента трения семян, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации о поверхность (ABS пластик):  $\bar{X} = 0,343$ ;  $\sigma = 0,313$ ;  $V = 0,91$ .

Числовые характеристики коэффициента трения семян кукурузы о поверхность (ABS пластик) приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Числовые характеристики коэффициента трения семян кукурузы о поверхность (ABS пластик) для выбора теоретического закона распределения износов

Интервал		0,316 - 0,328	0,328 - 0,339	0,339 - 0,351	0,351 - 0,362	0,362 - 0,374	0,374 - 0,385	0,385 - 0,396
Конец интервала $\bar{x}_{\kappa,i}$		0,328	0,339	0,351	0,362	0,374	0,385	0,396
Частота $m_i$		9	13	20	4	2	1	1
Опытная вероятность, $P_i$		0,18	0,26	0,4	0,08	0,04	0,02	0,02
Накопленная опытная вероятность, $\sum_{i=1}^n P_i$		0,18	0,44	0,84	0,92	0,96	0,98	1
ЗРВ	$\frac{\bar{x}_{\kappa i} - C}{a}$	0,4194	0,8412	1,2594	1,6775	2,0957	2,5175	2,9357
	$F(\bar{x}_{\kappa i})$	0,2	0,54	0,74	0,83	0,9	0,94	0,96
	$ \sum P_i - F(\bar{x}_{\kappa i}) $	0,69	0,46	0,26	0,17	0,1	0,06	0,04

Построена гистограмма, дифференциальная и интегральная кривые распределения значений коэффициента трения семян кукурузы о все виды поверхностей: ABS пластик (рис. 4.5); металлопластиковая (металлополимерная) труба valtec (рис. 4.6); армированная стекловолокном труба политэк ppr 80 sdr 11 (рис. 4.7).

По результатам обработки полученных данных экспериментальным путём были определены значения коэффициентов трения семян кукурузы о все виды поверхностей: ABS пластик, металлопластиковая (металлополимерная) труба valtec, армированная стекловолокном труба политэк ppr 80 sdr 11 (рис.4.8, а).

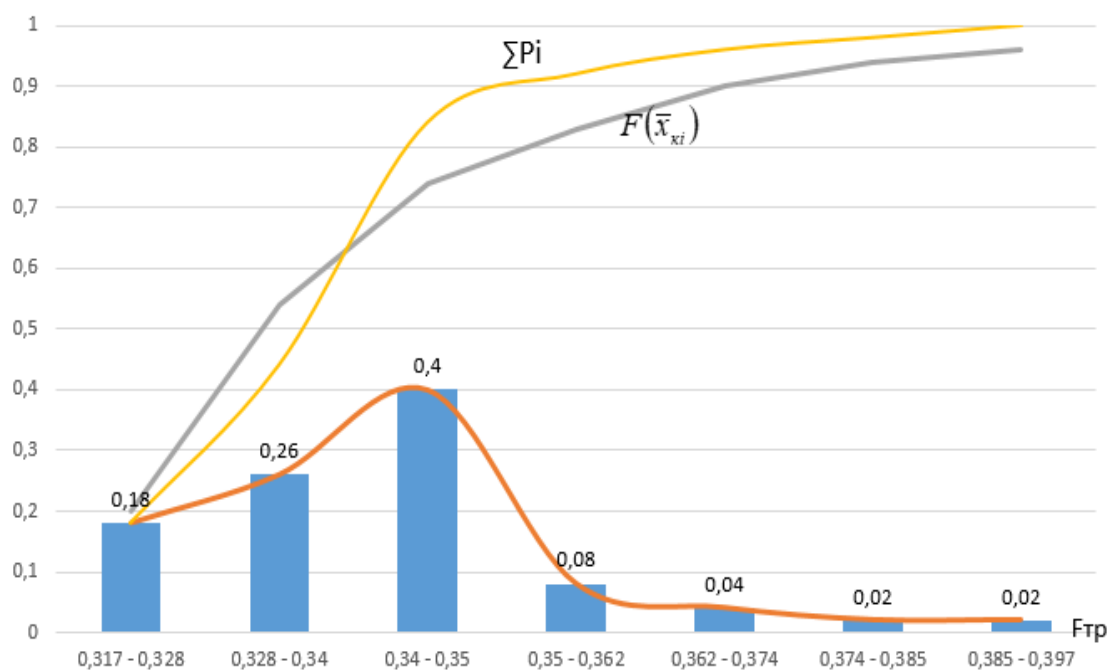


Рис. 4.5. Гистограмма, дифференциальная и интегральная кривые распределения значений коэффициента трения семян кукурузы о поверхность (ABS пластик)

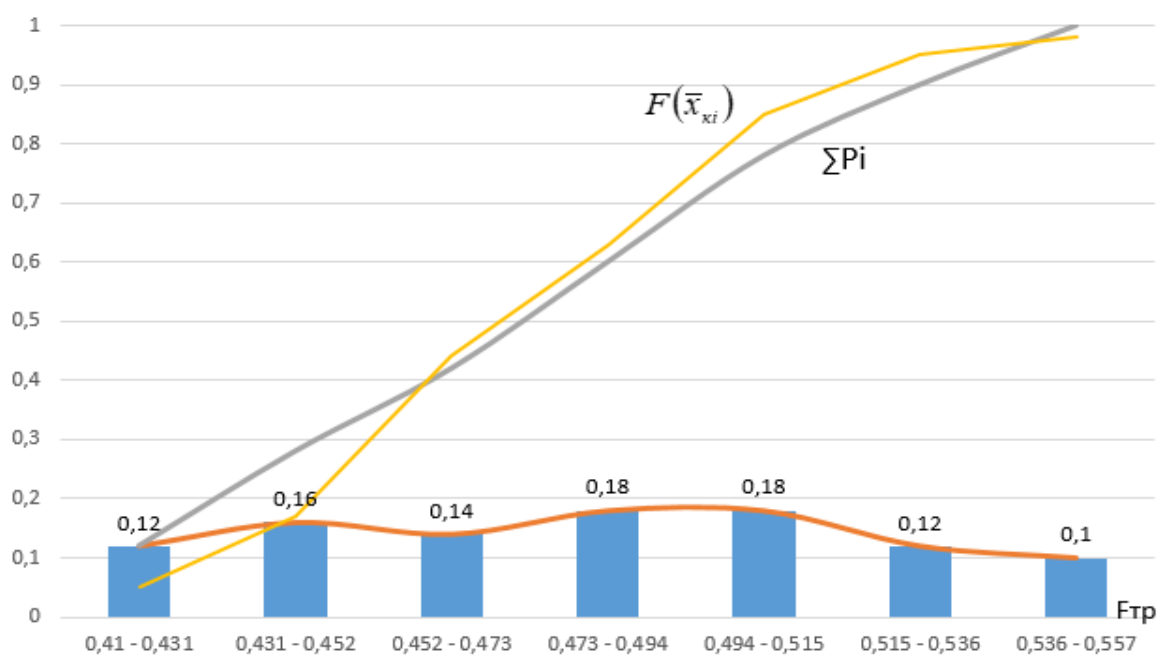


Рис. 4.6. Гистограмма, дифференциальная и интегральная кривые распределения значений коэффициента трения семян кукурузы о поверхность (металлопластиковая (металлополимерная) труба valtec)

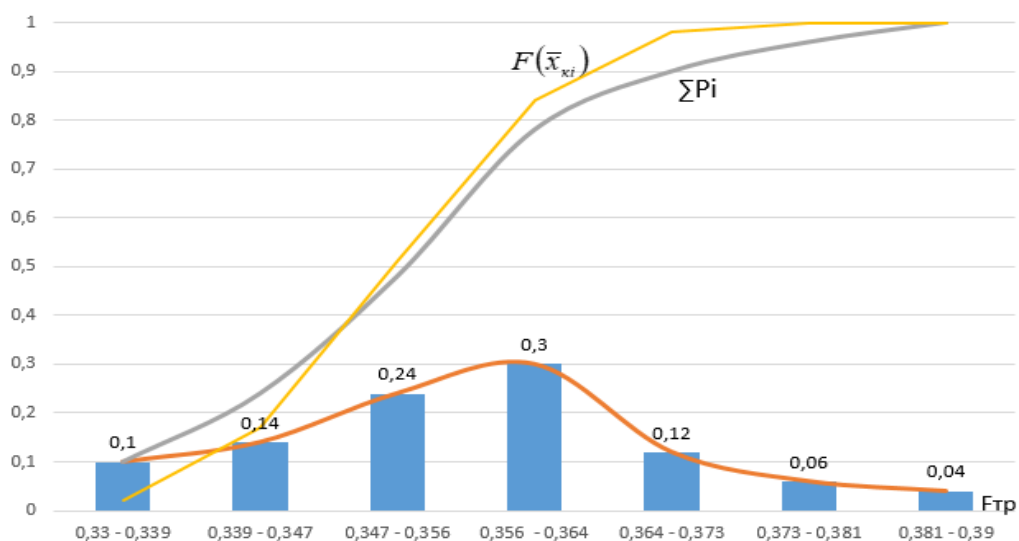


Рис. 4.7. Гистограмма, дифференциальная и интегральная кривые распределения значений коэффициента трения семян кукурузы о поверхность (армированная стекловолокном труба политэк ррг 80 sdr 11)

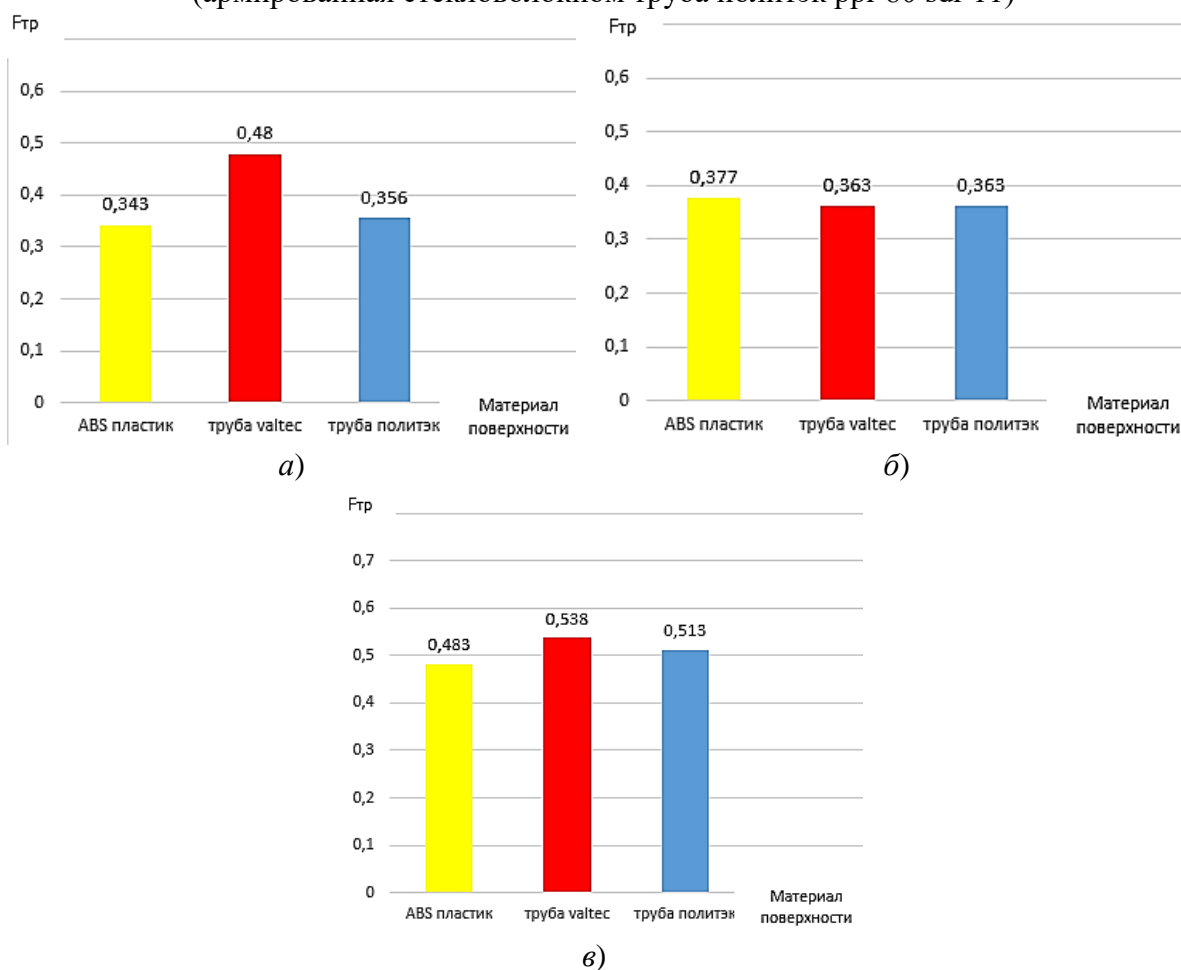


Рис. 4.8. Гистограмма значений коэффициента трения семян о поверхности ABS пластик, металлопластиковая (металлополимерная) труба valtec, армированная стекловолокном труба политэк ррг 80 sdr 11:  
 а – семян кукурузы; б – семян гороха; в – семян подсолнечника

Аналогично определялись значения коэффициента трения семян гороха и подсолнечника о поверхности ABS пластик, металлопластиковая (металлополимерная) труба valtec, армированная стекловолокном труба политек ррr 80 sdr 11 (рис. 4.8, б, в).

Остановимся подробнее на очень важной процедуре, называемой *рандомизацией* – это основной способ уменьшения ошибки экспериментатора из-за влияния источников неоднородности (систематических ошибок).

*Рандомизация* – искусственное превращение систематических ошибок в случайные. Это достигается построением последовательности проведения отдельных опытов по таблицам случайных чисел.

Ограничение на рандомизацию заключается в том, что экспериментатор на основании априорной информации об источниках неоднородности чётко формулирует требования к плану эксперимента, полностью исключающие источники неоднородности различных типов (дискретные и непрерывные).

*Комбинированные взаимно ортогональные квадраты.* Этот метод является одним из способов планирования однофакторных экспериментов с ограничением на рандомизацию.

Исходной для построения плана является квадратная таблица, содержащая N строк и n элементов, в которой любой из элементов встречается в каждой строчке и в каждом столбце один и только один раз. Латинским квадрат называют в связи с тем, что комбинации элементов внутри него обозначают буквами латинского алфавита (рис. 4.9).

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

Рис. 4.9. Латинский квадрат 4×4

Два латинских квадрата (рис.4.10, а, б) ортогональны, если при наложении одного квадрата на другой каждая пара элементов встречается в таблице только один раз (рис.4.10, в).

1	2	3	4	1	2	3	4	11	22	33	44
2	1	4	3	3	4	1	2	23	14	41	32
3	4	1	2	4	3	2	1	34	43	12	21
4	3	2	1	2	1	4	3	42	31	24	13

Рис. 4.10. Ортогональные латинские квадраты 4×4

Перестановка строк, столбцов или буквенных символов преобразует любой латинский квадрат в новый. Для квадрата 2×2 возможны два варианта, 3×3 – 12 вариантов, 4×4 – 576, 5×5 – 161280.

Для некоторых (не всех) латинских квадратов можно построить второй квадрат, ортогональный первому. То есть каждая буква этого нового квадрата встречается не только один раз в каждой строке и один раз в каждом столбце, но также один раз с каждой буквой латинского квадрата. Это ортогональные квадраты более высокого порядка, греко-латинские (рис. 4.11).

Aβ	Eγ	Dα	Cδ	Bε
Cα	Dε	Aγ	Bβ	Eδ
Bγ	Aδ	Cε	Eα	Dβ
Eε	Cβ	Bδ	Dγ	Aα
Dδ	Bα	Eβ	Aε	Cγ

Рис. 4.11. Греко-латинский квадрат 5×5

Комбинаторика латинских квадратов используется чаще всего для экспериментов сравнительного типа.

Описанный метод планирования экспериментов при исследовании влияния данного фактора на изучаемый объект обеспечивает гарантированное усреднение влияния всех остальных факторов. Кроме того, этот метод позволяет сократить общее количество опытов в  $n^{m-2}$  раз. Здесь  $m$  – число переменных факторов, а  $n$  – количество уровней каждого фактора.

Достоинствами планирования экспериментов по латинским квадратам в сравнении с классическим являются:

- сокращение количества экспериментов;
- возможность исследования некоторых многофакторных систем.

К недостаткам метода можно отнести:

- отсутствие статистически обоснованных результатов (выход зависит от неконтролируемых факторов);
- ограниченная область применимости (невозможность построить ортогональные квадраты  $6 \times 6$ );
- несовершенство методов построения эмпирических моделей.

*Пример.* Рассмотрим пример планирования однофакторного эксперимента последовательным типом плана эксперимента. Вначале берут верхнее или нижнее предельное значение независимой переменной величины (так называемые уровни) и изменяют его ступенчато до тех пор, пока не будет достигнуто другое предельное значение.

Например, исследуется зависимость потерь зерна  $d$  за соломотрясом в молотилке зерноуборочного комбайна от величины подачи хлебной массы, т. е.  $d = f(q)$ . Были установлены пределы изменения независимой переменной:  $q_{\min} = 1$  кг/с, :  $q_{\max} = 5$  кг/с хлебной массы.

При последовательном плане устанавливают последовательно подачи  $q = 1, 2, 3, 4, 5$  кг/с и определяют соответствующие этим подачам потери  $d$ , проводя для каждого значения  $q$  столько повторных опытов, сколько необходимо для получения заданной достоверности результатов.

Однако в процессе эксперимента (особенно если он длится несколько дней) различные неучитываемые факторы могут изменяться и оказывать существенное влияние на исследуемый параметр. Так, в рассматриваемом примере в ходе эксперимента могут изменяться свойства хлебной массы, свойства поверхности клавиш соломотряса из-за налипания пыли, показания измерительной аппаратуры и др. В результате этого каждый последующий переход к более высокой подаче

будет сопровождаться ошибкой (результат будет систематически только завышаться или только занижаться), а общий результат эксперимента будет иметь систематическую ошибку, которую трудно обнаружить. Эту систематичность ошибки можно предотвратить, если выбор точек (уровней) производить случайным образом. При этом полученные результаты замеров для каждой точки будут также иметь разброс, но они будут группироваться вокруг точных значений. Такой план эксперимента называется случайным или *рандомизированным*.

Для нашего примера подача  $q$  должна чередоваться следующим случайным образом: 3; 5; 1; 4; 2 кг/с.

Порядок чередования точек устанавливают с помощью таблиц случайных чисел или другими известными способами.

В связи с указанным недостатком последовательных планов их применение целесообразно лишь в случаях:

- когда продолжительность, стоимость или сложность эксперимента такова, что рандомизация становится нецелесообразной. Например, при исследованиях атомного реактора, для которого тепловое равновесие достигается в течение нескольких суток;

- если известно, что эксперимент является невоспроизводимым. Например, при исследовании образцов материалов на прочность.

*Рандомизированные блоки.* При проведении исследований имеют место случаи, когда на исследуемый процесс помимо исследуемого фактора оказывают влияние и ряд других внешних факторов. Например, определяется сменная выработка  $S$  комбайна в зависимости от ширины захвата  $B$  жатки (урожайность хлебов постоянна). При этом предполагается использовать жатки различной ширины захвата (№ 1–4).

Производительность комбайна зависит не только от ширины жатки  $B$ , но и от квалификации оператора, его темперамента и т. п., т. е. имеет место некоторый внешний фактор – «механизатор». Поэтому для рандомизации эксперимента по данному фактору необходимо слу-

чайным образом выбрать по числу жаток четырех рабочих А, В, С и D, каждый из которых будет работать полную смену на комбайне с жаткой данного захвата. Эксперимент должен длиться четыре дня (например: понедельник, вторник, среда и четверг).

К концу срока испытаний рабочие могут устать, потерять интерес к работе, что приведет к снижению производительности. Или же, наоборот, оператор, получив большой практический опыт, будет работать производительнее. Так, если все механизаторы будут последовательно испытывать комбайн с жатками № 1 – 4, то к концу срока производительность с жатками, например, № 2 и 3 может возрасти или уменьшиться по указанным причинам.

Поэтому необходимо рандомизировать эксперимент по последовательности испытания номеров жаток. Но при этом может оказаться, что некоторым рабочим выпало испытывать одинаковые номера жаток в один и тот же день, и на производительность окажут влияние вышеуказанные причины (кроме этого, потребуется дополнительное количество жаток).

Поэтому необходимо рандомизировать эксперимент таким образом, чтобы в данный день каждый номер жатки использовался только один раз. Такой полностью рандомизированный план эксперимента приведен в табл. 4.4.

Таблица 4.4

План проведения эксперимента

Механизатор	Дни недели			
	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.
А	1	2	3	4
В	3	4	1	2
С	2	1	4	3
D	4	3	2	1

В табл. 4.4 приведен так называемый *латинский квадрат* (4x4). После завершения испытаний результаты по каждому номеру жаток усредняются.



Рассмотренный эксперимент можно еще усовершенствовать. Если каждый механизатор работал на одной и той же машине и только менял каждый день жатки, то вследствие различий между молотилками может появиться систематическая ошибка. Если обозначить молотилки через № М1, М2, М3, М4, то эксперимент можно спланировать так, чтобы каждый механизатор работал на каждой молотилке только по одному дню (табл. 4.5).

Таблица 4.5

План проведения эксперимента

Механиза- тор	Дни недели			
	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.
А	1М1	2М2	3М4	4М3
В	3М2	4М1	1М3	2М4
С	2М3	1М4	4М2	3М1
Д	4М4	3М3	2М1	1М2

В табл. 4.5 приведен так называемый *греко-латинский квадрат* (4х4).

## 5. ПЛАНИРОВАНИЕ МНОГОФАКТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ТИПА $2^n$

*Полный факторный эксперимент (ПФЭ)* – это первое звено в цепи планов, последовательное создание и совершенствование которых привело к разработке математических методов моделирования сложных процессов.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется *полным факторным экспериментом*.

Полный факторный эксперимент может быть предложен исследователю как один из способов построения математической модели (идентификации) недетерминированного объекта. Этот способ оказывается наиболее предпочтительным в тех случаях, когда отсутствует априорная информация для обоснования структуры модели с позиций физико-химических представлений процессов, происходящих в объекте, отсутствует количественная оценка степени влияния изучаемых факторов на выходную переменную объекта, его выходной показатель.

Планирование и реализация ПФЭ включает этапы: *выбор параметра оптимизации, факторов и уровней их варьирования; кодирование факторов; составление плана-матрицы эксперимента; рандомизация опытов; реализация плана эксперимента; проверка однородности дисперсий параллельных опытов, их воспроизводимости; расчет коэффициентов уравнения модели, их ошибок и значимости, а также проверка адекватности модели.*

Если ПФЭ выбранная модель включает только линейные члены полинома и их произведения, то для оценки всех параметров модели используется план эксперимента с варьированием всех факторов на двух уровнях.

Такие планы принято называть планами типа  $2^n$ , где  $2^n = N$  – число всех возможных опытов,  $n$  – количество варьлируемых факторов.

Рассмотрим полный трехфакторный эксперимент  $2^3$ . Для проведения ПФЭ составим *матрицу (реплику)* планирования эксперимента, представляющую собой таблицу, где строки соответствуют различным

опытам, а столбцы – значениям факторов. Каждый столбец в матрице планирования называют вектор-столбцом, а каждую строку – вектор-строкой.

Запишем все сочетания уровней в эксперименте, используя кодированные значения факторов:  $+1$  и  $-1$ .

Любой многофакторный эксперимент является результатом варьирования всех факторов  $x_i$ :  $x_{i\min}$  соответствует  $-1$ ,  $x_{i\max}$  соответствует  $+1$  в матрице планирования эксперимента (табл. 5.1). Столбец  $x_0$  вводится искусственным путем, по всем строкам равен  $+1$ . Эта матрица является *матрицей базисных функций*.

Запись матрицы планирования, особенно для многих факторов, громоздка. Для ее сокращения удобно ввести условные буквенные обозначения строк, обозначив порядковый номер фактора строчной буквой латинского алфавита:  $x_1 - a$ ,  $x_2 - b$  и т.д. Опыт со всеми факторами на нижних уровнях условимся обозначать (1), а строки матрицы планирования записываются латинскими буквами только для факторов, которые находятся на верхних уровнях. Матрица планирования вместе с принятыми буквенными обозначениями приведена в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Матрица планирования эксперимента  $2^3$

		№ опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	Отклик $y$	Буквенные обозначения строк
$2^3$	$2^2$	1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	$y_1$	(1)
		2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	$y_2$	$a$
		3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	$y_3$	$b$
		4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	$y_4$	$ab$
		5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	$y_5$	$c$
		6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	$y_6$	$ac$
		7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	$y_7$	$bc$
		8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_8$	$abc$

Если для двух факторов все возможные комбинации уровней легко найти прямым перебором, то с ростом числа факторов возникает необходимость в некотором приеме построения матриц. Из многих возможных обычно используются три приема, основанных на переходе от матриц меньшей размерности к матрицам большей размерности. Рассмотрим первый. При добавлении нового фактора каждая комбинация уровней исходного плана встречается дважды: в сочетании с нижним и верхним уровнями нового фактора. Отсюда, естественно, появляется прием: записать исходный план для одного уровня нового фактора, а затем повторить его для другого уровня. Вот как это выглядит при переходе от эксперимента  $2^2$  к  $2^3$  (табл. 5.1). Графическая интерпретация ПФЭ представлена на рис. 5.1. Геометрической интерпретацией полного факторного эксперимента  $2^3$  служит куб, координаты вершин которого задают условия опытов. Куб задает область эксперимента, а центр куба является ее центром. Фигура, задающая область эксперимента в многомерном пространстве, является некоторым аналогом куба. Будем называть эту фигуру гиперкубом.

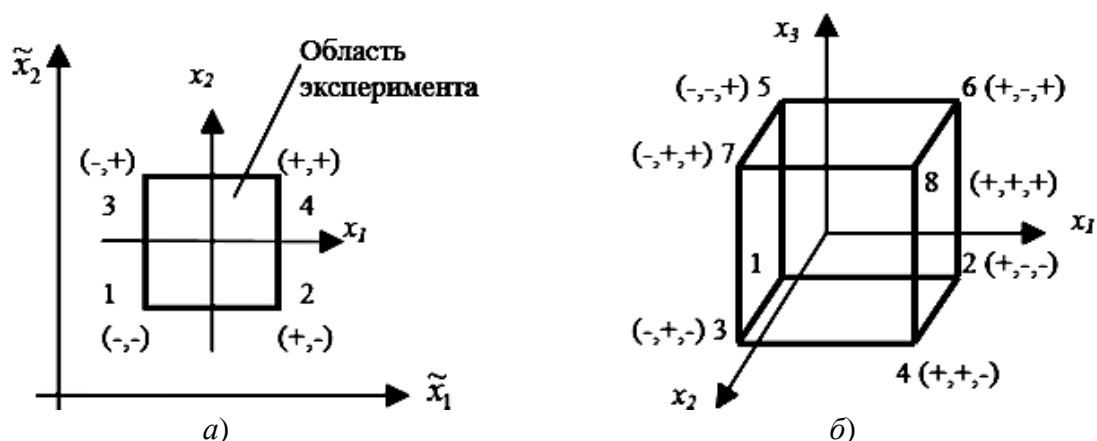


Рис. 5.1. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента:  
а – ПФЭ  $2^2$ ; б – ПФЭ  $2^3$

*Свойства полного факторного эксперимента.* Матрица эксперимента планирования ПФЭ (табл. 5.1) обладает рядом свойств:

1) *симметричность* плана относительно центра эксперимента – алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю, или

$$\sum_{i=1}^N x_{j,i} = 0, \quad (5.1)$$

где  $j$  – номер фактора,  $i$  – номер опыта,  $N$  – число опытов.

2) *условие нормировки плана* – сумма квадратов значений уровней любого фактора равна  $N$  (числу строк матрицы планирования ПФЭ), или

$$\sum_{i=1}^N x_{ij}^2 = N, \quad (5.2)$$

3) *ортogonalность плана* – сумма попарных произведений значений уровней любых 2 факторов (кроме  $j=u$ ) равна 0:

$$\sum_{i=1}^N x_{j,i} \cdot x_{u,i} = 0, j \neq u; \quad (5.3)$$

4) *рототабельность плана* – точность предсказания значений функции отклика одинакова на равном расстоянии от центра и не зависит от направления обхода.

Свойства ортогональности и рототабельности взаимоисключающие.

*Полный факторный эксперимент и математическая модель.* По результатам двухфакторного эксперимента ( $n = 2$ ) можно построить математическую модель процесса, в которой помимо линейных членов будет член, учитывающий эффект парного межфакторного взаимодействия:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2.$$

План ПФЭ типа  $2^3$  ( $n = 3$ ) позволяет построить модель вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Коэффициенты  $b_{12}$ ,  $b_{13}$  и  $b_{23}$  характеризуют эффект парного взаимодействия факторов  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , а коэффициент  $b_{123}$  – эффект тройного межфакторного взаимодействия.

План ПФЭ типа  $2^4$  ( $n = 4$ ) дает возможность рассчитать 16 коэффициентов модели:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 +$$

$$+b_{34}x_3x_4 + b_{123}x_1x_2x_3 + b_{124}x_1x_2x_4 + b_{234}x_2x_3x_4 + \\ +b_{134}x_1x_3x_4 + b_{1234}x_1x_2x_3x_4 .$$

Чтобы определить, какое влияние на функцию  $y$  оказывает каждый фактор  $x_i$ , проводят эксперимент, в котором меняют значения  $x_i$ , измеряя при этом  $y$ .

Приведенные модели являются линейными относительно факторов. Это значит, что если зафиксировать все факторы, кроме одного, то зависимость  $y$  от  $x_i$  будет линейной и график  $y = f(x_i)$  будет прямой линией, возрастающей при  $b_i > 0$  и убывающей при  $b_i < 0$ .

Известно, что для построения прямой достаточно задать две ее точки, поэтому для определения зависимостей рассмотренного типа достаточно двухуровневого эксперимента, т.е. определения отклика  $y$  в двух точках —  $x_{i \min}$  и  $x_{i \max}$ .

Линейные модели и двухуровневый эксперимент можно применять, если заранее известно, что функция отклика в исследуемом диапазоне изменения факторов близка к линейной. Однако часто эта функция может быть нелинейной.

Трехуровневый эксперимент позволяет избежать ошибки при определении вида модели, точнее оценить коэффициенты линейной модели и является обязательным при построении нелинейной модели, т.е. модели, в которой факторы  $x_i$  имеют степень, отличную от единицы.

Итак, в ходе выполнения эксперимента получаем математическую модель исследования, которая представляет собой уравнение, связывающее параметр оптимизации  $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$  с факторами  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , называемое *уравнением регрессии*:

$$y = b_0x_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i,j=1}^n b_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{i,i} x_i^2 + \sum_{i,j,k=1}^n b_{i,j,k} x_i x_j x_k + \dots, \quad (5.4)$$

где  $n$  — число строк в матрице планирования эксперимента;  $x_0 = 1$ .

После проведения опытов во всех точках факторного пространства необходимо найти коэффициенты уравнения регрессии. Для этого

пользуются методом наименьших квадратов.

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \rightarrow \min;$$

$$\hat{Y}_i = \varphi(x_1, \dots, x_k, b_0, \dots, b_k);$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (\varphi(x_1, \dots, x_k, b_0, \dots, b_k) - y_i)^2;$$

поскольку

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b_k} = 0 \end{cases},$$

то после дифференцирования получим

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 2 \sum_{i=1}^n (\varphi(x_1, \dots, x_k, b_0, \dots, b_k) - y_i) \frac{\partial \varphi}{\partial b_0} = 0; \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b_k} = 2 \sum_{i=1}^n (\varphi(x_1, \dots, x_k, b_0, \dots, b_k) - y_i) \frac{\partial \varphi}{\partial b_k} = 0. \end{cases}$$

Для линейной регрессии при k=2:

$$y_i = \varphi(x_{1i}, x_{2i}, b_0, b_1, b_2), y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i};$$

продифференцировав по коэффициентам, получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_0} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b_1} = x_{1i}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b_2} = x_{2i}.$$

Запишем уравнения в полной форме:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} - y_i) \cdot 1 = 0; \\ \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} - y_i) \cdot x_{1i} = 0; \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} - y_i) \cdot x_{2i} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^n 1)b_0 + (\sum_{i=1}^n x_{li})b_1 + (\sum_{i=1}^n x_{2i})b_2 = \sum_{i=1}^n y_i; \\ (\sum_{i=1}^n x_{li})b_0 + (\sum_{i=1}^n x_{li}^2)b_1 + (\sum_{i=1}^n x_{2i}x_{li})b_2 = \sum_{i=1}^n x_{li}y_i; \\ (\sum_{i=1}^n x_{2i})b_0 + (\sum_{i=1}^n x_{li}x_{2i})b_1 + (\sum_{i=1}^n x_{2i}^2)b_2 = \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i. \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^n 1 = n$ , разделим каждое уравнение на  $n$ :

$$\begin{cases} b_0 + (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{li})b_1 + (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i})b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \\ (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{li})b_0 + (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{li}^2)b_1 + (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{li})b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{li}y_i; \\ (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i})b_0 + (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{li}x_{2i})b_1 + (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i}^2)b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i. \end{cases}$$

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N y_i; \quad (5.5)$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_{li}y_i; \quad (5.6)$$

$$b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_{2i}y_i, \quad (5.7)$$

или в общем виде:

$$b_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_{ji}y_i, \quad j = \overline{0, k}, \quad (5.8)$$

где  $n$  – число строк матрицы планирования ПФЭ (см. табл. 5.1).

Эффекты взаимодействия определяются аналогично линейным эффектам. Так, для ПФЭ  $2^3$  коэффициенты определяются следующим образом:

$$b_{12} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (x_{li}x_{2i}) \cdot y_i; \quad (5.9)$$

$$b_{13} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (x_{li}x_{3i}) \cdot y_i; \quad (5.10)$$



$$b_{23} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (x_{2i} x_{3i}) \cdot y_i; \quad (5.11)$$

$$b_{123} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (x_{1i} x_{2i} x_{3i}) \cdot y_i. \quad (5.12)$$

Эффект взаимодействия  $x_1, x_2, x_3$  получается перемножением всех трех столбцов матрицы планирования (табл. 5.1) и называется *эффектом взаимодействия второго порядка*. Эффект взаимодействия двух факторов называется *эффектом взаимодействия первого порядка*. Вообще, эффект взаимодействия максимального порядка в полном факторном эксперименте имеет порядок, на единицу меньший числа факторов. Довольно часто применяются синонимы: парные эффекты взаимодействия ( $x_1 x_2, x_2 x_3 \dots$ ), тройные ( $x_1 x_2 x_3, x_2 x_3 x_4 \dots$ ) и т. д.

Полное число всех возможных эффектов, включая  $b_0$ , линейные эффекты и взаимодействия всех порядков, равно числу опытов полного факторного эксперимента.

Чтобы найти число возможных взаимодействий некоторого порядка, можно воспользоваться обычной формулой числа сочетаний

$$C_m^k = \frac{k!}{m! (k - m)!}, \quad (5.13)$$

где  $k$  – число факторов,  $m$  – число элементов во взаимодействии.

Так, для плана  $2^4$  число парных взаимодействий равно шести:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! (4 - 2)!} = 6.$$

*Рандомизация опытов ПФЭ.* Так как изменение отклика  $Y$  имеет случайный характер, то в каждой точке факторного пространства необходимо проводить  $m$  повторных опытов и результаты наблюдений усреднять. Перед реализацией плана на объекте необходимо рандомизировать варианты варьирования факторов, т.е., используя таблицу равномерно распределенных случайных чисел, определить последовательность реализации вариантов варьирования плана в  $Nm$  опытах (где  $N$  – число строк матрицы ПФЭ, а  $m$  – число повторных опытов).

*Пример.* Рассмотрим пример рандомизации опытов ПФЭ типа  $2^2$  с тремя повторными опытами:  $N = 4$ ,  $m = 3$ , общее количество опытов равно 12.

Матрица планирования эксперимента с рандомизированной последовательностью опытов приведена в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Матрица планирования эксперимента  
с рандомизированной последовательностью опытов

N	$x_1$	$x_2$	Последовательность проведения опытов		
			$y_{1i}$	$y_{2i}$	$y_{3i}$
1	-	-	10	4	6
2	+	-	9	2	7
3	-	+	1	8	11
4	+	+	5	3	12

### *Обработка результатов ПФЭ.*

#### *Построение и анализ математической модели*

Результаты эксперимента для каждой строки опытов записываются в столбцы  $y_{im}$  таблицы (матрицы) и производится их усреднение:

$$\bar{y}_l = \frac{\sum_{j=1}^m y_{lj}}{m}, \quad (5.14)$$

т. е. среднее арифметическое  $y$  равно сумме всех  $m$  отдельных результатов, деленной на количество параллельных опытов  $m$ .

Отклонение результата любого опыта от среднего арифметического можно представить как разность  $y_{ij} - \bar{y}_l$ , где  $y_{ij}$  результаты отдельного опыта. Наличие отклонения свидетельствует об изменчивости, вариации значений повторных опытов. Для измерения этой изменчивости чаще всего используют *дисперсию*.

*Дисперсией* называется среднее значение квадрата отклонений величины от ее среднего значения. Дисперсия обозначается  $S^2$  и выражается формулой:

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y}_l)^2, \quad (5.15)$$

где  $m - 1 = v_{1\text{вс}}$  – число степеней свободы, равное количеству опытов минус единица.

Одна степень свободы использована для вычисления среднего.

Корень квадратный из дисперсии, взятый с положительным знаком, называется *средним квадратическим отклонением (с.к.о.), стандартом или квадратичной ошибкой*.

Дисперсия и с.к.о. – это меры рассеяния, изменчивости. Чем больше дисперсия и стандарт, тем больше рассеяны значения параллельных опытов около среднего значения.

Ошибка опыта является суммарной величиной, результатом многих ошибок: ошибок измерений факторов, ошибок измерений параметра оптимизации и др. Каждую из этих ошибок можно, в свою очередь, разделить на составляющие.

Все ошибки принято разделять на два класса: систематические и случайные. Систематические ошибки порождаются причинами, действующими регулярно, в определенном направлении. Чаще всего эти ошибки можно изучить и определить количественно. Систематические ошибки находят, калибруя измерительные приборы и сопоставляя опытные данные с изменяющимися внешними условиями. Если систематические ошибки вызываются внешними условиями (переменной температуры, сырья и т.д.), следует компенсировать их влияние с помощью рандомизации. Случайными ошибками называются те, которые появляются нерегулярно, причины возникновения которых неизвестны и которые невозможно учесть заранее.

Систематические и случайные ошибки состоят из множества элементарных ошибок. Для того чтобы исключать инструментальные ошибки, следует проверять приборы перед опытом, иногда в течение опыта и обязательно после опыта.

Очень важно исключить из экспериментальных данных грубые ошибки, так называемый брак при повторных опытах. Ни в коем случае, конечно, нельзя вносить поправки самовольно, для отброса ошибочных опытов существуют правила (критерий Стьюдента, трехсигмовый критерий и др.).

Матрица планирования состоит из серии опытов, и дисперсия всего эксперимента получается в результате усреднения дисперсий всех опытов. По терминологии, принятой в планировании эксперимента, речь идет о подсчете дисперсии параметра оптимизации или, что то же самое, дисперсии воспроизводимости эксперимента (или дисперсии ошибки эксперимента).

В этом случае для проверки гипотезы об однородности дисперсий можно использовать критерий Кохрена, статистика которого имеет вид

$$G = \frac{\max\{S_i^2\}}{\sum_m S_i^2\{y\}}. \quad (5.16)$$

Если расчетное значение критерия  $G_p$  окажется меньше табличного значения  $G_{\text{табл}}$  для  $v_{1\text{вос}} = m - 1$  и  $v_{2\text{вос}} = N$  при заданном уровне значимости, то гипотеза об однородности выборочных дисперсий принимается (в других литературных источниках число степеней свободы обозначается:  $f_1=m-1$  и  $f_2=N$ ). В этом случае оценка генеральной дисперсии имеет вид

$$S_{\text{вос}}\{y\} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_i^2\{y\} \quad (5.17)$$

с числом степеней свободы  $v = N(m - 1)$ .

В противном случае, если  $G_p > G_{\text{табл}}$ , то гипотеза об однородности дисперсий отвергается.

Некоторые значения критерия Кохрена приведены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Значения критерия Кохрена при уровне значимости 0,05

Степень свободы $v_1$	$v_2$		
	4	8	16
1	0,9065	0,6798	0,4789
2	0,7679	0,5157	0,3358
3	0,6841	0,4377	0,2768
4	0,6287	0,3910	0,2429

*Пример.* В результате реализации плана эксперимента типа  $2^3$  получены экспериментальные данные (табл. 5.4).

Значения  $y_i$  и  $S_i^2$  приведены в табл. 5.4.

Расчетное значение критерия Кохрена  $G_p = 0,2$ ; табличное –  $G_{\text{табл}} = 0,5157$  при  $v_1 = 3 - 1 = 2$ ;  $v_2 = 8$  и  $\alpha = 0,05$ . Видно, что  $G_p < G_{\text{табл}}$ , поэтому гипотеза об однородности не отвергается.

Оценка дисперсии воспроизводимости определяется как

$$S_{\text{вос}}^2\{y\} = \frac{7 + 12 + 13 + 28 + 21 + 19 + 19 + 25}{8} = \frac{144}{8} = 18 ,$$

$$\text{с } \nu = 8 \cdot (3 - 1) = 16 .$$

Таблица 5.4

Данные модельного примера ( $m = 3$ )

$u$	$y_{i1}$	$y_{i2}$	$y_{i3}$	$\bar{y}_i$	$S_i^2$
1	73	69	68	70	7
2	58	58	64	60	12
3	54	59	52	55	13
4	84	94	92	90	28
5	100	106	109	105	21
6	98	90	97	95	19
7	77	85	78	80	19
8	105	95	100	100	25

Если проверка воспроизводимости дала отрицательный результат, то остается признать невоспроизводимость эксперимента вследствие наличия в объекте источников неоднородности, для выделения которых следует обратиться к приемам дисперсионного анализа.

После проверки воспроизводимости эксперимента можно перейти к определению модели эксперимента в виде уравнений регрессии.

Проверка значимости каждого коэффициента проводится *независимо*.

После определения оценок  $b$  коэффициентов уравнения модели необходимо проверить гипотезу об их значимости, другими словами, проверить, значимо ли полученная оценка отличается от нуля. Для этого используют критерий Стьюдента, расчетное значение которого определяется как

$$t_p = \frac{|b|}{S^2\{b\}} , \quad (5.17)$$

где  $S^2\{b\} = \frac{S_{\text{вос}}^2\{y\}}{Nm}$  ;  $N$  – число точек факторного пространства, в которых проводился эксперимент;  $m$  – число повторных опытов в этих точках.

Если найденная величина критерия  $t_p$  превышает табличное  $t_{\text{табл}}$  (табл. 5.5), для числа степеней свободы  $\nu = N(m - 1)$  при заданном  $\alpha$ ,

то оценку  $b$  коэффициента модели признают *значимой*. В противном случае (если  $t_p \leq t_{\text{табл}}$ ) оценка  $b$  считается *незначимой*, т.е. *равной нулю*. В этом случае математическую модель объекта составляют в виде уравнения связи отклика  $y$  и факторов  $x$ , включающего только значимые оценки коэффициентов.

Таблица 5.5

Зависимость  $t_{\text{табл}}$  от числа  $n$  при  $\alpha = 0,05$

$N$	4	8	12	16	24	32	48	64
$t_{\text{табл}}$	2,78	2,31	2,18	2,12	2,06	2,04	2,01	2,0

Для проверки гипотезы адекватности модели необходимо рассчитать теоретические значения  $\hat{y}_i$ . Рассеяние результатов наблюдений вблизи уравнения регрессии характеризуется дисперсией адекватности:

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{m}{N-l} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2, \quad (5.18)$$

где  $l$  – число членов модели.

Дисперсия адекватности определяется числом степеней свободы  $v_{\text{ад}} = N - l$ .

*Правило: в планировании эксперимента число степеней свободы для дисперсии адекватности равно числу различных опытов, результаты которых используются при подсчете коэффициентов регрессии, минус число определяемых коэффициентов.*

Для проверки адекватности математической модели выясняется соотношение между остаточной дисперсией (дисперсией адекватности) и дисперсией ошибки эксперимента (дисперсией воспроизводимости).

Проверяют гипотезу адекватности, используя критерий Фишера (F - критерий):

$$F_p = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_{\text{вос}}^2\{y\}}. \quad (5.19)$$

Если расчетное значение критерия  $F_p$  меньше табличного  $F_{\text{табл}}$  для соответствующих степеней свободы:  $v_{1\text{ад}} = N - l$ ;  $v_{2\text{ад}} = v_{\text{вос}} = N(m - 1)$  (табл. 5.6) при заданном уровне значимости, то гипотезу об адекватности не отвергают. В противном случае модель признается неадекватной.

Таблица 5.6

Зависимость  $F_{\text{табл}}$  от числа степеней свободы числителя ( $v_1$ ) и знаменателя ( $v_2$ ) при  $\alpha = 0,05$

$v_2$	$v_1$							
	4	8	12	16	24	30	48	60
1	225	239	244	246	249	250,2	252	253
2	19,12	19,37	19,41	19,43	19,45	19,46	19,47	19,48
3	9,12	8,84	8,74	8,69	8,64	8,62	8,59	8,57
4	6,39	6,04	5,91	5,84	5,77	5,74	5,70	5,68
5	5,19	4,82	4,68	4,60	4,53	4,50	4,45	4,42
6	4,53	4,15	4,00	3,92	3,84	3,81	3,76	3,72
7	4,12	3,73	3,57	3,49	3,41	3,38	3,32	3,28
8	3,84	3,44	3,28	3,20	3,12	3,08	3,02	3,00
9	3,63	3,23	3,07	2,98	2,90	2,86	2,80	2,77
10	3,48	3,07	2,91	2,82	2,74	2,70	2,66	2,61

*Пример.* Построить математическую модель по данным предыдущего примера:  $S_{\text{вос}}^2\{y\} = 18$ ;  $n = 8$ ;  $m = 3$ ;  $t_{\text{табл}}(0,95; 16) = 2,12$ .

Расчет коэффициентов модели:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{1i} \bar{y}_i}{N} = \frac{-70 - 60 + 55 + 90 - 105 - 95 + 80 + 100}{8} = -0,625;$$

$$b_{12} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{1i} x_{2i} \bar{y}_i}{N} = \frac{70 - 60 - 55 + 90 + 105 - 95 - 80 + 100}{8} = 9,375$$

и т.д.

Уравнение модели имеет вид:

$$y = 81,875 - 0,625x_1 + 4,375x_2 + 13,125x_3 + 9,375x_1x_2 - 1,875x_2x_3 - 4,375x_1x_3 - 1,875x_1x_2x_3.$$

Далее, определяется стандартное отклонение для коэффициента  $b$ :

$$b^2\{b\} = \frac{18}{8 \cdot 3} = 0,75, \quad S\{b\} = 0,87.$$

Находим значение

$$t_p(b_1) = \frac{|-0,625|}{0,87} \cong 0,72; \quad t_p(b_2) = \frac{4,375}{0,87} \cong 5,02.$$

При  $\alpha = 0,05$  и  $v = 16$   $t_{\text{табл}} = 2,12$ .

Уравнение модели будет иметь вид:

$$y = 81,875 + 4,375x_2 + 13,125x_3 + 9,375x_1x_2 -$$

$$-1,875x_2x_3 - 4,375x_1x_3 - 1,875x_1x_2x_3.$$

Для проверки гипотезы адекватности полученной модели необходимо рассчитать значения  $\hat{y}_i$  по данной модели, например, для 1 – го опыта  $x_{21} = -1$ ;  $x_{31} = -1$  и т.д.

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= 81,875 - 4,375 - 13,125 + 9,375 - \\ &\quad - 1,875 - 4,375 + 1,875; \\ \hat{y}_1 &= 69,375 \text{ и т.д.}\end{aligned}$$

Результаты расчетов сведены в табл. 5.7.

Таблица 5.7

План ПФЭ типа  $2^3$

и	Матрица плана							Результаты	
	$x_{1i}$	$x_{2i}$	$x_{3i}$	$x_{1i}x_{2i}$	$x_{2i}x_{3i}$	$x_{1i}x_{3i}$	$x_{1i}x_{2i}x_{3i}$	Опытов $\bar{y}_i$	расчетов
1	-	-	-	+	+	+	-	70	69,375
2	-	+	-	-	-	+	+	60	59,375
3	+	-	-	-	+	-	+	55	55,625
4	+	+	-	+	-	-	-	90	90,625
5	-	-	+	+	-	-	+	105	105,375
6	-	+	+	-	+	-	-	95	94,375
7	+	-	+	-	-	+	-	80	80,625
8	+	+	+	+	+	+	+	100	100,625

Определяем дисперсию адекватности

$$S_{ад}^2 = \frac{3}{8-7} \cdot 3,12 = 9,36.$$

Определяем расчетное значение  $F$  – критерия (при этом необходимо в числитель выражения подставлять большее из двух значений дисперсии).

$$F_p = \frac{S_{вос}^2\{y\}}{S_{ад}^2} = \frac{18}{9,36} = 1,92.$$

При  $v_1 = 8 \cdot (3 - 1)$ ,  $v_2 = 8 - 7 = 1$  и  $\alpha = 0,05$  находим табличное значение  $F_{табл} = 246$  (табл. 5.6). Так как  $F_p = 1,92 \ll F_{табл} = 246$  гипотезу адекватности модели не отвергаем.



## 6. ПЛАНИРОВАНИЕ МНОГОФАКТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Число опытов в полном факторном эксперименте быстро возрастает с ростом числа факторов. Так, при трех факторах имеем  $2^3=8$  опытов, при пяти факторах –  $2^5=32$  опыта, а при 8 факторах уже  $2^8=256$  опытов. Это вызывает необходимость разработки методов отбора части переменных, наиболее существенно влияющих на параметр оптимизации. Поэтому, хотя полный факторный план  $2^k$  является удобным с точки зрения простоты проведения анализа параметров функции регрессии, тем не менее ПФЭ обладает большой избыточностью опытов. При трех и более факторах количество опытов можно существенно сократить за счет потери части информации, не очень существенной при построении линейных моделей.

Рассмотрим самый простой ПФЭ  $2^2$ . Напишем матрицу плана эксперимента (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Матрица планирования ПФЭ  $2^2$

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2 (x_3)$	$y$
1	+1	–1	–1	+1	$y_1$
2	+1	+1	–1	–1	$y_2$
3	+1	–1	+1	–1	$y_3$
4	+1	+1	+1	+1	$y_4$

Пользуясь таким планированием, можно вычислить четыре коэффициента и представить результаты эксперимента в виде неполного квадратного уравнения

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2.$$

Если имеются основания считать, что в выбранных интервалах варьирования процесс может быть описан линейной моделью, то достаточно определить три коэффициента:  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ . Остается одна степень свободы. Употребим ее для минимизации числа опытов. При линейном приближении  $b_{12} \rightarrow 0$  вектор-столбец  $x_1x_2$  можно использовать для нового фактора  $x_3$ . Поставим этот фактор в скобках над взаимодействием  $x_1x_2$  и посмотрим, каковы будут оценки коэффициентов. Здесь

уже не будет тех отдельных оценок, которые мы имели в полном факторном эксперименте  $2^n$ . Оценки смешаются следующим образом:  $b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}$ ;  $b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}$ ;  $b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}$ .

Поскольку предполагается, что модель линейна, следовательно, все парные взаимодействия незначимы. Мы нашли средство минимизировать число опытов: вместо восьми опытов для изучения трех факторов можно поставить четыре. При этом матрица планирования не теряет своих оптимальных свойств (ортогональность, ротатабельность и т.п.).

*Правило: чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору присвоить вектор-столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь. Тогда значение нового фактора в условиях опытов определяется знаками этого столбца.*

Матрица (табл. 6.1) сохраняет все свойства полного факторного эксперимента и дает возможность оценить свободный член  $b_0$  и три коэффициента при линейных членах, потому что для  $x_3$  использован вектор-столбец  $x_1x_2$  полного факторного эксперимента  $2^2$ . Если мы в дополнение к столбцам матрицы вычислим еще столбцы для произведений  $x_1x_3$  и  $x_2x_3$ , то увидим, что элементы столбца  $x_1x_3$  совпадут с элементами столбца  $x_2$ , а элементы столбца  $x_2x_3$  – с элементами столбца  $x_1$ . Найденные нами коэффициенты будут оценками для совместных эффектов  $b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}$ ;  $b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}$ ;  $b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}$ .

Такое планирование удобно, так как смешаны эффекты взаимодействия с основными эффектами. (Но все основные эффекты оцениваются отдельно друг от друга) Так как постулируется линейная модель, то предполагается, что эффекты взаимодействия близки к нулю, и поэтому  $b_1 \approx \beta_1$ ;  $b_2 \approx \beta_2$ ;  $b_3 \approx \beta_3$ .

Поставив четыре опыта для оценки влияния трех факторов, мы воспользовались половиной полного факторного эксперимента  $2^3$ , или *полурепликой*. Если бы мы  $x_3$  приравняли к  $-x_1x_2$ , то получили бы вторую половину матрицы  $2^3$ . В этом случае:  $b_1 \rightarrow \beta_1 - \beta_{23}$ ;  $b_2 \rightarrow \beta_2 - \beta_{13}$ ;  $b_3 \rightarrow \beta_3 - \beta_{12}$ . При реализации обеих полуреплик можно получить отдельные оценки для линейных эффектов и эффектов взаимодействия,

как и в полном факторном эксперименте  $2^3$ .

Объединение этих двух полуреплик и есть полный факторный эксперимент  $2^3$ .

Матрица из восьми опытов для четырехфакторного планирования будет полурепликой от полного факторного эксперимента  $2^4$ , а для пятифакторного планирования – четвертьрепликой от  $2^5$ . В последнем случае два линейных эффекта приравниваются к эффектам взаимодействия. Для обозначения дробных реплик, в которых  $p$  линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия, удобно пользоваться условным обозначением  $2^{n-p}$ . Так, полуреплика от  $2^6$  запишется в виде  $2^{6-1}$ , а четвертьреплика от  $2^5$  – в виде  $2^{5-2}$ .

### 6.1. Генерирующие соотношения и определяющие контрасты

При построении полуреплики  $2^3$  существует всего две возможности: приравнять  $x_3$  к  $+x_1x_2$  или к  $-x_1x_2$ . Поэтому есть только две полуреплики  $2^{3-1}$  (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Матрица планирования  $2^3$  с двумя полурепликами

Номер опыта	I: $x_3 = x_1x_2$				II: $x_3 = -x_1x_2$			
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$-x_1x_2x_3$
1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
2	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	-1
3	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1

Для произведения трех столбцов матрицы I выполняется соотношение:  $+1 = x_1x_2x_3$ , а матрицы II:  $-1 = x_1x_2x_3$ . Отсюда видно, что все знаки столбцов произведений одинаковы и в первом случае равны +1, а во втором -1.

Символическое обозначение произведения столбцов, равного +1 или -1, называется *определяющим контрастом*. Контраст помогает определять смешанные эффекты. Чтобы определить, какой эффект смешан с данным, нужно помножить обе части определяющего кон-

траста на столбец, соответствующий данному эффекту. Так, если  $+I = x_1x_2x_3$ , то для  $x_1$  имеем  $x_1 = x_1^2x_2x_3 = x_2x_3$ , так как всегда  $x_i^2 = 1$ . Для  $x_2$  находим  $x_2 = x_1x_2^2x_3 = x_1x_3$ , для  $x_3$  будет  $x_3 = x_1x_2x_3^2 = x_1x_2$ .

Для второй полуреплики с помощью определяющего контраста  $-1 = x_1x_2x_3$  будем иметь другие генерирующие соотношения:  $x_1 = -x_1x_2x_3 = -x_2x_3$ ;  $x_2 = -x_1x_2x_3 = -x_1x_3$ ;  $x_3 = -x_1x_2x_3 = -x_1x_2$ .

Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называется *генерирующим соотношением*.

Полуреплики, в которых основные эффекты смешаны с двухфакторными взаимодействиями, носят название *планов с разрешающей способностью III* (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте). Такие планы принято обозначать:  $2_{III}^{3-1}$ .

При выборе полуреплики  $2^{4-1}$  возможно восемь решений:

1.  $x_4 = x_1x_2$
2.  $x_4 = -x_1x_2$
3.  $x_4 = x_2x_3$
4.  $x_4 = -x_2x_3$
5.  $x_4 = x_1x_3$
6.  $x_4 = -x_1x_3$
7.  $x_4 = x_1x_2x_3$
8.  $x_4 = -x_1x_2x_3$

Разрешающая способность этих полуреplik различна. Так, реплики 1–6 имеют по три фактора в определяющем контрасте, а 7–8 по четыре. Реплики 7 и 8 имеют максимальную разрешающую способность и называются *главными*. Разрешающая способность задается системой смешивания данной реплики. Она будет максимальной, если линейные эффекты смешаны с эффектами взаимодействия наибольшего возможного порядка.

При отсутствии априорной информации об эффектах взаимодействия экспериментатор стремится выбрать реплику с наибольшей разрешающей способностью, так как тройные взаимодействия обычно менее важны, чем парные. Если существует информация об эффектах взаимодействия, то она должна использоваться при выборе реплики.

Реплики, в которых нет ни одного главного эффекта, смешанного

с другим главным эффектом или парным взаимодействием, а все парные взаимодействия смешаны друг с другом, носят название *планов с разрешающей способностью IV* (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте). Они имеют обозначение  $2_{VI}^{4-1}$ . Полуреплика, заданная определяющим контрастом  $I = +x_1x_2x_3x_4$ , имеет только четные комбинации букв в каждой строке. Ее можно записать следующим образом, считая строку (1) четной:

(1),  $ad, bd, ab, ac, cd, bc, abcd$ .

А полуреплика, заданная  $I = -x_1x_2x_3x_4$ , имеет только нечетные комбинации  $a, b, c, d, abd, acd, abc, bcd$ .

Такие полуреплики называют *главными полурепликами*, так как они обладают наибольшей разрешающей способностью.

Пусть выбраны полуреплики, заданные определяющими контрастами  $I = +x_1x_2x_3x_4$  и  $I = -x_1x_2x_3x_4$ . Совместные оценки здесь определяются соотношениями:

1.  $x_1 = x_2x_3x_4$        $x_1 = -x_2x_3x_4$
2.  $x_2 = x_1x_3x_4$        $x_2 = -x_1x_3x_4$
3.  $x_3 = x_1x_2x_4$        $x_3 = -x_1x_2x_4$
4.  $x_4 = x_1x_2x_3$        $x_4 = -x_1x_2x_3$
5.  $x_1x_2 = x_3x_4$        $x_1x_2 = -x_3x_4$
6.  $x_1x_3 = x_2x_4$        $x_1x_3 = -x_2x_4$
7.  $x_1x_4 = x_2x_3$        $x_1x_4 = -x_2x_3$

Такой тип смешивания даст возможность оценивать линейные эффекты совместно с эффектами взаимодействий второго порядка, а взаимодействия первого порядка – совместно друг с другом.

Если полуреплики заданы генерирующими соотношениями  $x_4 = x_1x_2$  и  $x_4 = -x_1x_2$ , то в этом случае определяющими контрастами являются  $I = x_1x_2x_4$  и  $I = -x_1x_2x_4$ , следовательно, мы получаем планы с разрешающей способностью III и некоторые основные эффекты смешиваем с парными взаимодействиями:

- |                         |                       |
|-------------------------|-----------------------|
| 1. $x_1 = x_2x_4$       | $x_1 = -x_2x_4$       |
| 2. $x_2 = x_1x_4$       | $x_2 = -x_1x_4$       |
| 3. $x_3 = x_1x_2x_3x_4$ | $x_3 = -x_1x_2x_3x_4$ |
| 4. $x_4 = x_1x_2$       | $x_4 = -x_1x_2$       |
| 5. $x_2x_3 = x_1x_3x_4$ | $x_2x_3 = -x_1x_3x_4$ |
| 6. $x_1x_3 = x_2x_3x_4$ | $x_1x_3 = -x_2x_3x_4$ |
| 7. $x_3x_4 = x_1x_2x_3$ | $x_3x_4 = -x_1x_2x_3$ |

Разрешающая способность этих полуреplik ниже, чем у планов с разрешающей способностью IV, с помощью которых линейные эффекты определяются независимо от парных взаимодействий.

Эти полуреплики имеют в каждой строке как четные, так и нечетные комбинации букв. Такие полуреплики не являются главными. Разумен выбор такой полуреплики, если имеется априорная информация о большей значимости тройных взаимодействий по сравнению с парными или о незначимости трех парных взаимодействий  $x_2x_4$ ,  $x_1x_4$ ,  $x_1x_2$ .

Как видите, выбор дробной реплики требует много терпения и труда. Но другого пути нет. Применяя дробное планирование, нужно точно знать систему смешивания, четко представлять, какую информацию приходится терять.

При выборе полуреплики  $2^{5-1}$  в распоряжении экспериментатора имеется множество вариантов. Так,  $x_5$  можно приравнять к одному из шести парных взаимодействий. В этом случае получим полуреплику с разрешающей способностью III. Очевидно, это будет не лучший выбор полуреплики. Далее,  $x_5$  можно приравнять к одному из четырех тройных взаимодействий. Тогда получим план с разрешающей способностью IV, и все линейные эффекты будут смешаны с тройными взаимодействиями. И наконец, полуреплика может быть задана генерирующими соотношениями  $x_5 = +x_1x_2x_3x_4$  или  $x_5 = -x_1x_2x_3x_4$ . Определяющими контрастами в этом случае будут  $I = +x_1x_2x_3x_4x_5$  и  $I = -x_1x_2x_3x_4x_5$ . Такие реплики носят название планов с разрешающей способностью V и обозначаются  $2_v^{5-1}$ . В таких планах линейные эффекты смешаны со взаимодействиями третьего порядка, а взаимодействия первого порядка —

с взаимодействиями второго порядка

## 6.2. Выбор 1/4-реплик.

### Обобщающий определяющий контраст

При исследовании влияния пяти факторов можно поставить не 16 опытов, как в предыдущем примере, а только 8, т.е. воспользоваться репликой  $2^{5-2}$ . Здесь возможны двенадцать решений, если  $x_4$  приравнять парному взаимодействию, а  $x_5$  – тройному:

1. $x_4 = x_1x_2$	$x_5 = x_1x_2x_3$
2. $x_4 = x_1x_2$	$x_5 = -x_1x_2x_3$
3. $x_4 = -x_1x_2$	$x_5 = x_1x_2x_3$
4. $x_4 = -x_1x_2$	$x_5 = -x_1x_2x_3$
5. $x_4 = x_1x_3$	$x_5 = x_1x_2x_3$
6. $x_4 = x_1x_3$	$x_5 = -x_1x_2x_3$
7. $x_4 = -x_1x_3$	$x_5 = x_1x_2x_3$
8. $x_4 = -x_1x_3$	$x_5 = -x_1x_2x_3$
9. $x_4 = x_2x_3$	$x_5 = x_1x_2x_3$
10. $x_4 = x_2x_3$	$x_5 = -x_1x_2x_3$
11. $x_4 = -x_2x_3$	$x_5 = x_1x_2x_3$
12. $-x_4 = x_2x_3$	$x_5 = -x_1x_2x_3$

Допустим, выбран пятый вариант:  $x_4 = x_1x_3$  и  $x_5 = x_1x_2x_3$ . Тогда определяющими контрастами являются:  $I = x_1x_3x_4$  и  $I = x_1x_2x_3x_5$ .

Если перемножить эти определяющие контрасты, то получится третье соотношение, задающее элементы столбца  $I = x_2x_4x_5$ . Чтобы полностью охарактеризовать разрешающую способность реплики, необходимо записать обобщающий определяющий контраст  $I = x_1x_3x_4 = x_2x_4x_5 = x_1x_2x_3x_5$ .

Система смешивания определяется умножением обобщающего определяющего контраста последовательно на  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  и т. д.

$$x_1 = x_3x_4 = x_1x_2x_4x_5 = x_2x_3x_5$$

$$x_2 = x_1x_2x_3x_4 = x_4x_5 = x_1x_3x_5$$

$$x_3 = x_1x_4 = x_2x_3x_4x_5 = x_1x_2x_5$$

$$x_4 = x_1x_3 = x_2x_5 = x_1x_2x_3x_4x_5$$

$$X_5 = X_1X_3X_4X_5 = X_2X_4 = X_1X_2X_3$$

$$X_1X_2 = X_2X_3X_4 = X_1X_4X_5 = X_3X_5$$

$$X_1X_5 = X_3X_4X_5 = X_1X_2X_4 = X_2X_3$$

Получается довольно сложная система смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействия первого, второго, третьего и четвертого порядков. Если, например, коэффициенты  $b_{12}$  и  $b_{15}$  отличны от нуля, то возникают сомнения, можно ли пренебрегать другими парными взаимодействиями, с которыми смешаны линейные эффекты. Тогда следует поставить вторую серию опытов, выбрав нужным образом другую 1/4-реплику.

При этом можно воспользоваться методом «перевала». Смысл этого метода заключается в том, что вторая четвертьреплика получается из первой путем изменения всех знаков матрицы на обратные. Тогда в обобщающем определяющем контрасте тройные произведения имеют знак, противоположный их знаку в первой четвертьреплике. Тройные произведения определяют парные взаимодействия в совместных оценках для линейных эффектов. Усредняя результаты обеих четвертьреплик, можно получить линейные эффекты, не смешанные с парными взаимодействиями.

Для дополнения 1/4-реплики до 1/2-реплики, если есть подозрения, что эффекты взаимодействия первого порядка отличаются от нуля, нужно взять вторую четвертьреплику с обобщающим контрастом, в котором два тройных произведения имеют отрицательный знак, так как тройные произведения определяют парные взаимодействия в совместных оценках для линейных эффектов.

Однако можно представить себе и такой случай, когда целесообразно освободить линейные эффекты от эффектов взаимодействия второго порядка и только часть из линейных эффектов от парных взаимодействий. Тогда нужно выбрать 1/4-реплику таким образом, чтобы в обобщающем определяющем контрасте произведение четырех членов имело отрицательный знак, так как это произведение определяет тройные взаимодействия в совместных оценках для линейных эффектов.



### 6.3. Характеристика дробных реплик

Достоинство принципа насыщения становится более ощутимым с ростом факторов. Например, при изучении 15 факторов имеется возможность проведения 16 экспериментов, вместо 32768 ( $2^{15}$ ) (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Характеристика дробных реплик

Число факторов	Дробная реплика	Условное обознач.	Число опытов	
			для дробных реплик	для полного факторного эксперим.
3	1/2 – реплика от $2^3$	$2^{3-1}$	4	8
4	1/2 – реплика от $2^4$	$2^{4-1}$	8	16
5	1/4 – реплика от $2^3$	$2^{5-2}$	8	32
6	1/8 – реплика от $2^5$	$2^{6-3}$	8	64
7	1/16 – реплика от $2^6$	$2^{7-4}$	8	128
5	1/2 – реплика от $2^5$	$2^{5-1}$	16	32
6	1/4 – реплика от $2^6$	$2^{6-2}$	16	64
7	1/8 – реплика от $2^7$	$2^{7-3}$	16	128
8	1/16 – реплика от $2^8$	$2^{8-4}$	16	256
9	1/32 – реплика от $2^9$	$2^{9-5}$	16	512
10	1/64 – реплика от $2^{10}$	$2^{10-6}$	16	1024
11	1/128 – реплика от $2^{11}$	$2^{11-7}$	16	2048
12	1/256 – реплика от $2^{12}$	$2^{12-8}$	16	4096
13	1/512 – реплика от $2^{13}$	$2^{13-9}$	16	8192
14	1/1024 – реплика от $2^{14}$	$2^{14-10}$	16	16384
15	1/2048 – реплика от $2^{15}$	$2^{15-11}$	16	32768

*Правило: Чтобы сократить число опытов, нужно дополнительно вводимый в эксперимент фактор варьировать как вектор–столбец матрицы, соответствующий взаимодействию, которым можно пренебречь. Тогда изменение уровней нового фактора определится знаками этого вектор–столбца.*

При выборе дробных реплик необходимо определить и проанализировать с учетом априорной информации схему замещения оценок коэффициентов модели. С этой целью вычисляют генерирующие соотношения, которые показывают, с каким из эффектов смешан данный

эффект.

В задачах с большим числом факторов выбор взаимодействия для насыщения плана относительно непросто. Следует помнить, что основное положение при выборе взаимодействий в общем случае состоит в следующем. При введении в эксперимент новых факторов следует выделять им столбцы матрицы, принадлежащие взаимодействиям с более высоким порядком. Так, вводя 4-й фактор в план  $2^3$ , следует варьировать  $x_4$  как столбец матрицы с взаимодействием третьего порядка  $x_1x_2x_3$ , т. е.  $x_4 = x_1x_2x_3$ , так как предположение об отсутствии взаимодействия  $x_1x_2x_3$  более реально, по сравнению, например, с взаимодействием  $x_1x_2$ .

## 7. ПЛАНИРОВАНИЕ МНОГОФАКТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. ЦЕНТРАЛЬНО–КОМПОЗИЦИОННЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Разработка математической модели предусматривает принцип от «простого к сложному». Этот принцип – переход от полинома 1-го порядка к полиному 2-го порядка. Для детального изучения области оптимума и участков поверхности отклика со значительной кривизной линейная модель становится неадекватной. В таких случаях для математического описания может быть достаточно полинома второго порядка, реже третьего порядка, полученного с использованием планов соответственно второго и третьего порядков. Планы  $2^k$  не могут обеспечить получение отдельных оценок коэффициентов  $b_{ij}$  при квадратичных функциях и коэффициента  $b_0$ .

Планы 2-го порядка позволяют получить математическое описание в виде полной квадратичной модели, содержащей кроме основных эффектов  $b_i$  все парные взаимодействия  $b_{ij}$  и квадратичные эффекты  $b_{ii}$ .

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2. \quad (7.1)$$

Из теории интерполяции известно, что для нахождения отдельных оценок интерполяционного полинома число уровней изменения каждой из независимых переменных должно быть больше на единицу порядка полинома. Для вычисления полинома 2-го порядка число уровней должно быть как минимум три. В ПФЭ  $3^n$  при  $n = 2$ ,  $N = 9$ , а при трех факторах,  $N = 27$ . Применение полного факторного эксперимента типа  $3^n$  для получения отдельных оценок коэффициентов полинома второго порядка не является рациональным, так как планирование на трех уровнях характеризуется резким увеличением объема эксперимента.

Сократить число опытов можно, используя центральные композиционные планы (ЦКП), ядром которых являются *линейные ортогональные планы*.

Композиционный план образуется путем добавления некоторого количества специальных точек к «ядру», состоящему из планов  $2^n$  или  $2^{n-p}$ . Если к «ядру» добавить точку в центре плана с координатами

$(0, 0...0)$  и  $2n$  так называемых звездных точек с координатами  $(\pm\alpha, 0...0)$ ,  $(0, \pm\alpha, ..0)$ , ...,  $(0, 0... \pm\alpha)$ , то получим *центральный композиционный план*, предложенный Боксом. В качестве ядра используются точки ПФЭ – вершины квадрата (рис. 7.1) и куба (рис. 7.2) соответственно.

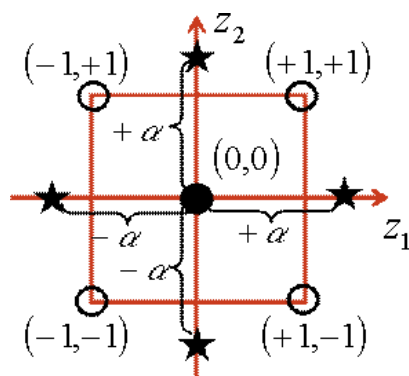


Рис. 7.1. Центрально-композиционный план

Используют эти планы обычно на заключительном этапе исследования: при описании экспериментальной области в ситуациях, когда отсутствует априорная информация об объекте и его полиномиальную модель приходится подбирать последовательно, начиная с простейшего линейного уравнения, которое затем достраивается до полной квадратичной модели. В таких случаях применение композиционных планов оказывается наиболее выгодным по числу опытов.

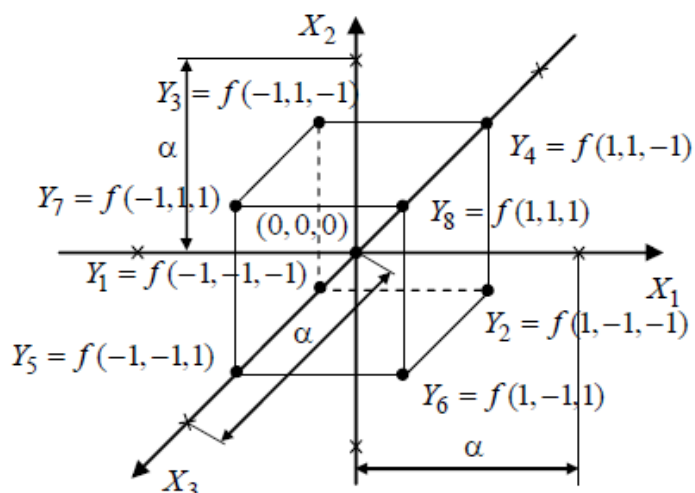


Рис. 7.2. Геометрическая интерпретация центрально-композиционного плана, соответствующего полиному 2-го порядка для трех независимых переменных

Центрально-композиционный план (ЦКП) любой модификации состоит из трех частей.

*Первая часть* – основа или ядро плана – это полный факторный эксперимент (ПФЭ)  $2^n$  или дробный факторный эксперимент (ДФЭ)  $2^{n-p}$  (где  $p$  – количество неизвестных коэффициентов регрессии,  $p = 0, 1, 2$ ).

При этом требуется, чтобы ядро плана обеспечивало отдельную оценку коэффициентов регрессии и всех парных взаимодействий. Данное условие накладывает весьма жесткое ограничение на возможную степень дробности используемого дробного факторного эксперимента. В частности, при  $n \leq 4$  может применяться лишь ПФЭ  $2^n$ ; если  $5 \leq n \leq 7$ , то кроме полного факторного эксперимента (ПФЭ) можно использовать и ДФЭ, а для  $n > 7$  допустим также и ДФЭ  $2^{n-2}$ .

*Вторая часть ЦКП* – так называемые звездные точки, расположенные на координатных осях на расстоянии  $\pm \alpha$  от центра эксперимента. Общее число таких точек равно  $2n$ . «Звездные» точки представляют собой два уровня варьирования каждым из трех факторов, значения которых лежат за пределами граней куба (рис. 7.3). Точки лежат на расстоянии, большем, чем  $\pm 1$ , от центра плана и лежат на поверхности сферы диаметром  $2\alpha$ .

*Третья часть ЦКП* – опыты в центре плана; число таких опытов  $N_0 \geq 1$ .

Общее число опытов ЦКП при  $n$  факторах составит

$$N = 2^{n-p} + 2n + N_0, \quad (7.1)$$

где  $2n$  – число «звездных» точек;  $p$  – количество неизвестных коэффициентов регрессии (число, определяющее дробность эксперимента),  $p = 0, 1, 2$ ;  $N_0$  – число опытов в центре плана.

Для случая двух факторов ( $n = 2$ ):  $N = 4 + 4 + 1 = 9$ .

Произвольный симметричный ЦКП приведен в табл. 7.1.

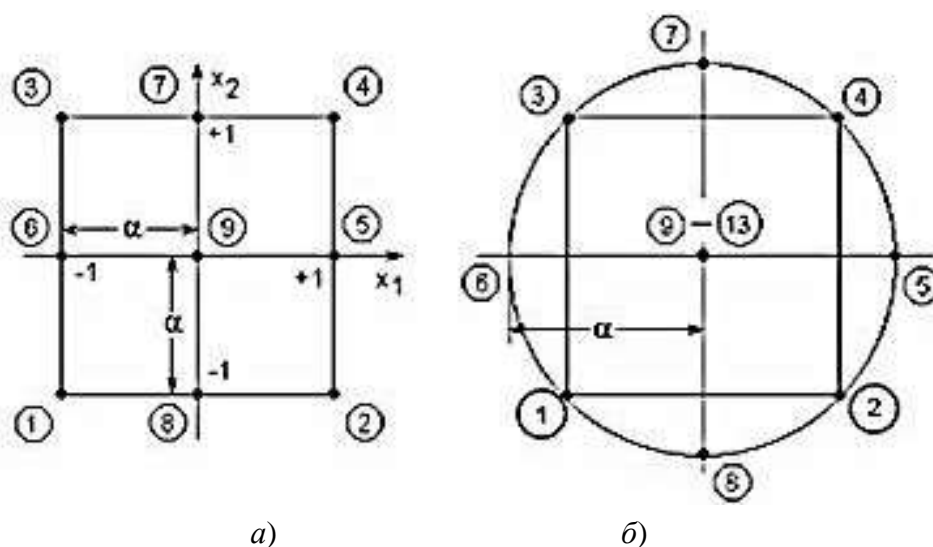


Рис. 7.3. Планы второго порядка при  $n=2$ :  
 $a$  – ортогональный;  $b$  – ротатабельный

Таблица 7.1

### Произвольный симметричный ЦКП

Составные части ЦКП	G	Факторы	Число точек			
		$x_1$	$x_2$	...	$x_k$	
Ядро плана (ПФЭ $2^n$ или ДФЭ $2^{n-p}$ )	1	-1	-1	...	-1	$2^{n-p}$ $p=0;1;2;$
	2	+1	-1	...	-1	
	3	-1	+1	...	-1	
	4	+1	+1	...	-1	
	...	...	...	...	...	
	$2^{n-p}$	+1	+1	...	-1	
«Звездные» точки	$2^{n-p}+1$	$-\alpha$	0	...	0	$2n$
	$2^{n-p}+2$	$+\alpha$	0	...	0	
	$2^{n-p}+3$	0	$-\alpha$	...	0	
	$2^{n-p}+4$	0	$+\alpha$	...	0	
	...	...	...	...	...	
	$2^{n-p}+2n-1$	0	0	...	$-\alpha$	
	$2^{n-p}+2n$	0	0	...	$+\alpha$	
Центральные точки	$2^{n-p}+2n+1$	0	0	...	0	$N_0$
	...	...	...	...	...	
	$2^{n-p}+2n+N_0$	0	0	...	0	

Конкретные значения  $\alpha$  и  $N_0$  выбираются исходя из тех или иных критериев оптимальности регрессионных экспериментов. В связи с этим принято выделять *ортогональные* (ОЦКП) и *ротатабельные* (РЦКП) центрально–композиционные планы.

## 7.1. Ортогональные центрально-композиционные планы (ОЦКП)

В ОЦКП, как правило,  $N_0 = 1$ , а план целиком строится с учетом критерия ортогональности (сумма попарных произведений значений уровней двух любых факторов (столбцов) равна нулю). Для обеспечения попарной ортогональности столбцов, отвечающих свободному члену  $\beta_0$  и квадратичным коэффициентам  $\beta_i^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , а также столбцов, отвечающих квадратичным членам между собой, необходимо принять специальные меры.

С этой целью, прежде всего, несколько видоизменяют систему базисных функций, а именно – ищут регрессионную модель в виде:

$$y(x) = b_0' + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} (x_i^2 - x_i'^2), \quad (7.2)$$

$$x_i'^2 = \frac{1}{N} \sum_{g=1}^N x_{ig}^2 = \frac{2^{n-p} + 2\alpha^2}{N}, \quad (7.3)$$

где  $N$  – общее число точек плана:  $N = 2^{n-p} + 2n + 1$ ;

$$\beta_0' = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i'^2, \quad (7.4)$$

где  $p$  – число, определяющее дробность эксперимента;  $\beta_i$  – коэффициенты уравнения регрессии.

Как видно, в этой модели при квадратичных коэффициентах используются *центрированные переменные*. Переход к таким переменным обеспечивает ортогональность столбца свободного члена уравнения регрессии (базисная функция  $f_0 \equiv 1$ ) и любого из столбцов центрированных квадратов (базисная функция вида  $\tilde{x}_i^2 = x_i^2 - x_i'^2$ ), и независимость друг от друга коэффициентов регрессии по результатам опытов.

Действительно, для указанных столбцов имеет место следующее равенство:  $\sum_{g=1}^N f_0 (x_{ig}^2 - x_i'^2) = \sum_{g=1}^N x_{ig}^2 - N x_i'^2 = \sum_{g=1}^N x_{ig}^2 - N \frac{1}{N} \sum_{g=1}^N x_{ig}^2 = 0$ .

Это равенство справедливо независимо от конкретного значения  $\alpha$ . Однако, при произвольном  $\alpha$  остаются неортогональными столбцы матрицы планирования, отвечающие различным центрированным квадратичным переменным.

Поэтому в ОЦКП числовое значение  $\alpha$  выбирается как раз из условия ортогональности именно этих столбцов и определяется по формуле

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{2^{n-p-2}(2^{n-p} + 2n + 1)} - 2^{n-p-1}} = \sqrt{(\sqrt{N \cdot 2^{n-p}} - 2^{n-p})/2}. \quad (7.5)$$

Найденные по формуле (7.5) числовые значения  $\alpha$  при  $n = 2 \div 8$  приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Значения «звездного» плеча  $\alpha$  при  $n = 2 \div 8$

$n$	2	3	4	5		6		7		8		
Ядро ЦПК	ПФЭ $2^2$	ПФЭ $2^3$	ПФЭ $2^4$	ПФЭ $2^5$	ДФЭ $2^{5-1}$	ПФЭ $2^6$	ДФЭ $2^{6-1}$	ПФЭ $2^7$	ДФЭ $2^{7-1}$	ПФЭ $2^8$	ДФЭ $2^{8-1}$	ДФЭ $2^{8-2}$
N	9	15	25	43	27	77	45	143	79	273	145	81
$\alpha$	1,000	1,215	1,414	1,596	1,547	1,761	1,724	1,909	1,885	2,045	2,029	2,000

Общее количество опытов  $N$  в ОЦКП равно  $N = 2^{n-p} + 2n + N_0$ . Таким образом, переходя к квадратичной модели с центрированными квадратичными переменными и используя указанные значения  $\alpha$ , можно добиться полной ортогонализации столбцов матрицы планирования (табл. 7.3).

Таблица 7.3

Матрица планирования ортогонального  
центрально-композиционного плана

$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$x_1 x_2$	...	$x_{n-1} x_n$	$x_1^2 - x'_1{}^2$	$x_2^2 - x'_2{}^2$	...	$x_n^2 - x'_n{}^2$
+1	-1	-1	...	-1	+1	...	+1	$1 - x'_1{}^2$	$1 - x'_2{}^2$	...	$1 - x'_n{}^2$
+1	+1	-1	...	-1	-1	...	+1	$1 - x'_1{}^2$	$1 - x'_2{}^2$	...	$1 - x'_n{}^2$
+1	-1	+1	...	-1	-1	...	...	$1 - x'_1{}^2$	$1 - x'_2{}^2$	...	$1 - x'_n{}^2$
+1	+1	+1	...	-1	+1	...	...	$1 - x'_1{}^2$	$1 - x'_2{}^2$	...	$1 - x'_n{}^2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
+1	+1	+1	...	+1	+1	...	+1	$1 - x'_1{}^2$	$1 - x'_2{}^2$	...	$1 - x'_n{}^2$
+1	$-\alpha$	0	...	0	0	...	0	$\alpha^2 - x'_1{}^2$	$-x'_2{}^2$	...	$-x'_n{}^2$
+1	$+\alpha$	0	...	0	0	...	0	$\alpha^2 - x'_1{}^2$	$-x'_2{}^2$	...	$-x'_n{}^2$
+1	0	$-\alpha$	...	0	0	...	0	$-x'_1{}^2$	$\alpha^2 - x'_2{}^2$	...	$-x'_n{}^2$
+1	0	$+\alpha$	...	0	0	...	0	$-x'_1{}^2$	$\alpha^2 - x'_2{}^2$	...	$-x'_n{}^2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
+1	0	0	...	$-\alpha$	0	...	0	$-x'_1{}^2$	$-x'_2{}^2$	...	$\alpha^2 - x'_n{}^2$
+1	0	0	...	$+\alpha$	0	...	0	$-x'_1{}^2$	$-x'_2{}^2$	...	$\alpha^2 - x'_n{}^2$
+1	0	0	...	0	0	...	0	$-x'_1{}^2$	$-x'_2{}^2$	...	$-x'_n{}^2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
+1	0	0	...	0	0	...	0	$-x'_1{}^2$	$-x'_2{}^2$	...	$-x'_n{}^2$



Следовательно, оценки коэффициентов регрессии, полученные с помощью ОЦКП, некоррелированы между собой, что, впрочем, характерно для любого ортогонального плана.

Реализация эксперимента по выбранной матрице планирования проводится также с дублированием опытов в каждой точке плана аналогично ПФЭ  $2^n$ .

Оценки коэффициентов регрессии для соответствующих групп равны:

для свободного члена:

$$\beta_0' = \frac{\sum_{i=1}^N x_{0i} y'_i}{N}; \quad (7.6)$$

для линейных слагаемых

$$\beta_u = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ui} y'_i}{2^{n-p} + 2\alpha^2}, \quad u = 1, 2, \dots, k; \quad (7.7)$$

для попарных взаимодействий

$$\beta_{ju} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{jui} y'_i}{2^{n-p}}, \quad j, u = 1, 2, \dots, n; \quad j \neq u; \quad (7.8)$$

для центрированных квадратичных переменных

$$\beta_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ki}^2 y'_i}{2\alpha^4}. \quad (7.9)$$

Приведем теперь уравнение регрессии к более привычному для нас виду:

$$y(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 x_i^2, \quad (7.10)$$

где

$$\beta_0 = \beta_0' - x_i'^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{0i} y'_i}{N} - \frac{2^{n-p} + 2\alpha^2}{N} \sum_{i=1}^n \beta_i^2. \quad (7.11)$$

Условие нормировки в случае ортогонального ЦКП не соблюда-

ется, так как  $\sum_{i=1}^N x_{iu}^2 \neq N$  ( $u$  – номер любого столбца, кроме нулевого).

Это значит, что точность оценки коэффициентов регрессии для разных групп неодинакова.

Оценки дисперсий для каждой из четырех однородных групп для  $m$  параллельных опытов подсчитываются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} S^2\{\beta_i\} &= \frac{S_{\epsilon}^2}{m(2^{n-p} + 2\alpha^2)}; \\ S^2\{\beta_{ij}\} &= \frac{S_{\epsilon}^2}{m \cdot 2^{n-p}}; \\ S^2\{\beta_i^2\} &= \frac{S_{\epsilon}^2}{m \cdot 2\alpha^4}; \\ S^2\{\beta_0\} &= \frac{S_{\epsilon}^2}{m(N + 2\alpha^4)}, \end{aligned} \tag{7.12}$$

где  $S_{\epsilon}^2$  – дисперсия воспроизводимости.

Таким образом, дисперсия оценки  $Y'$  функции отклика в некоторой точке факторного пространства зависит не только от расстояния этой точки до центра плана  $p$ , но и от ее положения на гиперсфере. Значит, ОЦКП не удовлетворяет условию ротатабельности. Поэтому, если не предъявляются особые требования к точности предсказания выходной величины по уравнению регрессии в любом направлении факторного пространства от базовой точки, предпочтительно применение ортогонального ЦКП ввиду его простоты.

*Пример:* в качестве примера в табл. 7.4 приведена матрица ортогонального ЦКП для двух факторов, а на рис. 7.3, а изображена схема этих опытов. Значение  $x'_i{}^2$  определяем по формуле (7.3), с учетом, что для двухфакторного эксперимента  $\alpha=1$ . Получим  $x'_i{}^2=0,67$ .

Таблица 7.4

Матрица планирования ортогонального  
центрально-композиционного плана для двух факторов

Система опытов	Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1^2 - x_1'^2$	$x_2^2 - x_2'^2$	$y$
Полный факторный эксперимент	1	+1	-1	-1	+1	+0,33	+0,33	$y_1$
	2	+1	+1	-1	-1	+0,33	+0,33	$y_2$
	3	+1	-1	+1	-1	+0,33	+0,33	$y_3$
	4	+1	+1	+1	+1	+0,33	+0,33	$y_4$
Опыт в «звездных» точках	5	+1	-1	0	0	+0,33	-0,67	$y_5$
	6	+1	+1	0	0	+0,33	-0,67	$y_6$
	7	+1	0	-1	0	-0,67	+0,33	$y_7$
	8	+1	0	+1	0	-0,67	+0,33	$y_8$
Опыт в центре плана	9	+1	0	0	0	-0,67	-0,67	$y_9$
$\sum x_i^2$		9	6	6	4	2	2	

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{0i} y_i}{9} - 0,67b_{11} - 0,67b_{22}; \quad (7.13)$$

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_2 y_i}{6}; \quad (7.14)$$

$$b_{12} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_1 x_2 y_i)}{4}; \quad (7.15)$$

$$b_{11} = \frac{\sum_{i=1}^N ((x_1)^2 y_i)}{2}; \quad (7.16)$$

$$b_{22} = \frac{\sum_{i=1}^N ((x_2)^2 y_i)}{2}. \quad (7.17)$$

Коэффициенты регрессии некоррелированы между собой, поэтому значимость каждого можно проверять по критерию Стьюдента и исключение из уравнения незначимых коэффициентов не скажется на других. Все коэффициенты уравнений определяются с одинаковой точностью:

$$S_{b_j} = \frac{S_{\text{воспр}}}{\sqrt{N}}. \quad (7.18)$$

Если параллельные опыты проводились в центре плана, то дисперсия воспроизводимости определяется по формуле

$$S_{воспр} = \frac{\sum_{u=1}^{NN} (y_u^0 - \bar{y}^0)^2}{NN - 1}, \quad (7.19)$$

где  $NN$  – количество параллельных опытов;  $\bar{y}^0$  – среднее значение величин  $y$ , полученных при параллельных опытах;  $y_u^0$  – значения, полученные при постановке каждого из дополнительных опытов в центре плана.

Расчетное значение критерия Стьюдента определяется по формуле

$$t_j = \frac{|b_j|}{S_{b_j}}. \quad (7.20)$$

Если расчетное значение доверительного интервала меньше табличного, то данные коэффициенты исключаются из уравнения регрессии.

Далее проверяют адекватность полученного уравнения регрессии по критерию Фишера:

$$F = \frac{S_{ост}^2}{S_{воспр}^2}, \quad (7.21)$$

где остаточная дисперсия определяется по формуле

$$S_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2}{N - l}, \quad (7.22)$$

где  $l$  – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии.

Если расчетное значение критерия Фишера меньше табличного, то полученное уравнение регрессии адекватно описывает эксперимент.

Линии поверхности, в которой функция отклика системы принимает одинаковые значения называют *линиями равного отклика* (рис. 7.4).

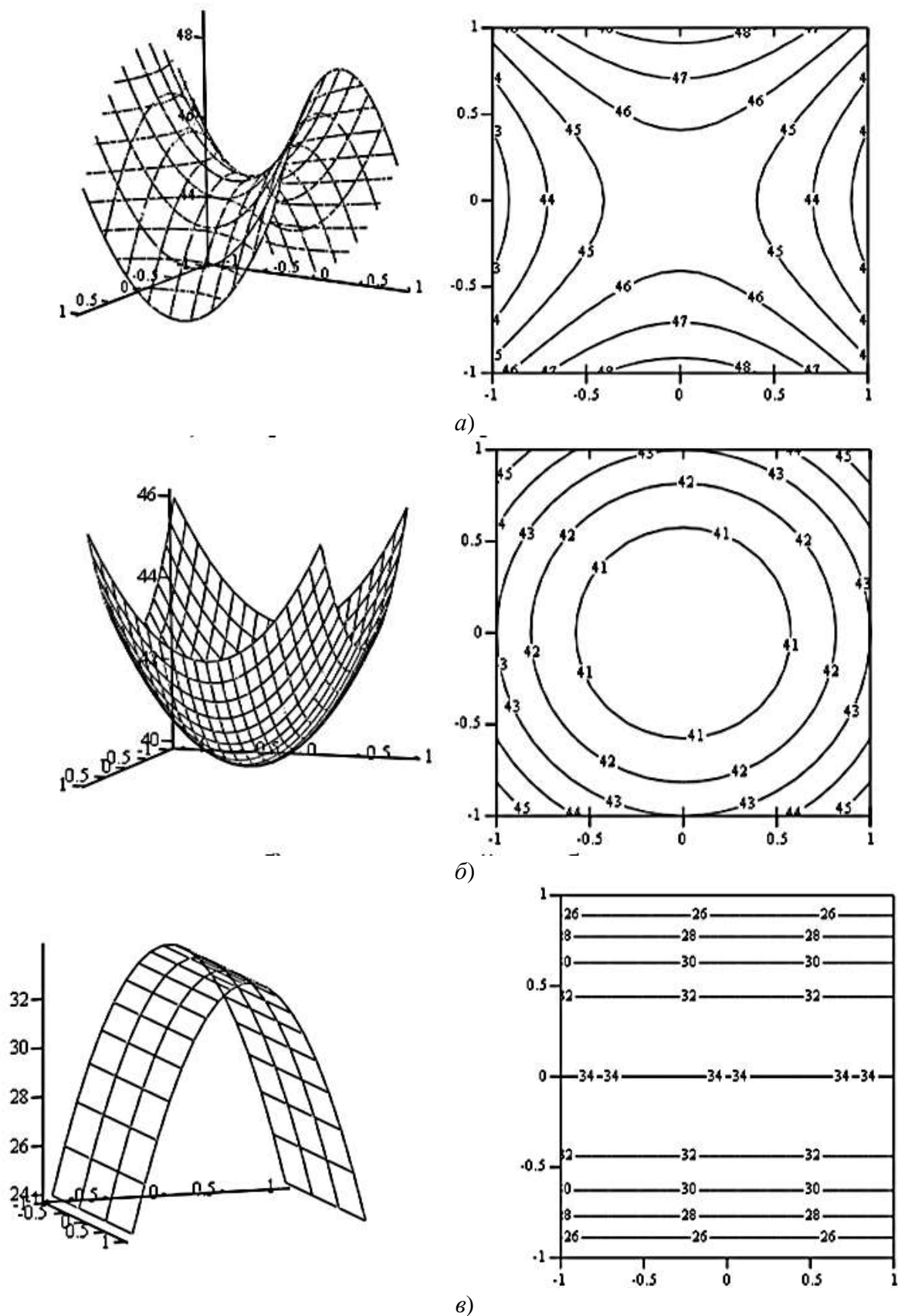


Рис. 7.4. Виды поверхности отклика и линии равного уровня для двухфакторного эксперимента при ортогональном планировании: *а* – гиперболический параболоид – «седло»; *б* – эллиптический параболоид; *в* – «гребень»

Использование уравнения регрессии второго порядка позволяет определить координаты точки оптимума функции отклика. Для определения координат точек экстремуму проводят вычисления первой производной по каждому из значений факторов. Корни полученной системы уравнений представляют собой координаты точек экстремума исследуемой функции:

$$\begin{cases} \frac{dY(x_1, x_2)}{dx_1} = 0 \\ \frac{dY(x_1, x_2)}{dx_2} = 0 \end{cases} \quad (7.22)$$

## 7.2. Ротатабельные центрально-композиционные планы (РЦКП)

План второго порядка, представленный в табл. 7.4, не обладает свойством ротатабельности.

*Ротатабельным* называется планирование, для которого дисперсия отклика (выходного параметра)  $y(x)$  (формула (7.2)) предсказанного уравнения регрессии постоянна для всех точек, находящихся на равном расстоянии от центра эксперимента.

При ортогональном плане эксперимента (см. рис. 7.3) удаление от центра точек 5-8 в  $\sqrt{2}=1,414$  раза меньше, чем удаление точек 1-4, следовательно, коэффициенты уравнения регрессии определяются с различной дисперсией.

Бокс и Хантер предложили ротатабельные планы второго порядка. Для приведения ортогонального плана к ротатабельному «звездное» плечо необходимо определять из условий:

$$\begin{aligned} \text{➤ при } n < 5 \quad \alpha &= 2^{\frac{n}{4}}; \\ \text{➤ при } n \geq 5 \quad \alpha &= 2^{\frac{n-1}{4}}. \end{aligned}$$

В общем виде звездное плечо определяется по формуле

$$\alpha = 2^{\frac{n-p}{4}}, \quad (7.23)$$

где  $n$  – число факторов;  $p$  – дробность реплики (для ПФЭ  $p=0$ , для по-

луреплики  $p=1$ , для четвертьреплики  $p=2$  и т.д.).

В табл. 7.5 приведены значения  $\alpha$  и  $N_0$  для РЦКП, причем значения  $N_0$  приведены для равномер-ротатбельного плана.

Таблица 7.5

Значения звездных точек  $\alpha$  и числа точек  
в центре ротатбельных планов  $N_0$  для РЦКП

$n$	2	3	4	5		6		7	
<i>Ядро ЦПК</i>	ПФЭ $2^2$	ПФЭ $2^3$	ПФЭ $2^4$	ПФЭ $2^5$	ДФЭ $2^{5-1}$	ПФЭ $2^6$	ДФЭ $2^{6-1}$	ПФЭ $2^7$	ДФЭ $2^{7-1}$
$N_0$	5	6	7	10	6	15	9	21	14
$N$	13	20	31	52	32	91	53	163	92
$\alpha$	1,414	1,682	2,000	2,378	2,000	2,828	2,378	3,364	2,828

*Ротатбельные планы* – это планы, у которых точки плана располагаются на окружностях (сферах, гиперсферах).

У ротатбельного плана первого порядка точки плана располагаются на одной окружности (сфере, гиперсфере) с радиусом  $R$ :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_{iv}^2} = \text{const} = R, \quad (7.24)$$

где  $V=1, \dots, N$  – номер точки плана,  $i=1, \dots, n$ ;  $n$  – номер фактора.

В таком случае точность оценивания функции отклика по любому направлению факторного пространства (для всех точек плана) одинаковая.

Ротатбельный план может быть симметричным, когда точки плана располагаются симметрично друг другу. Рассмотренный ранее план ПФЭ  $2^n$  – ротатбельный симметричный план первого порядка.

У ротатбельных планов второго порядка точки плана располагаются на двух концентрических гиперсферах с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ . В таких планах:

для  $V=1, \dots, N_0$ ,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_{iv}^2} = \text{const}_I = R_I; \quad (7.25)$$

для  $W=1, \dots, n_0$ ,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_{iW}^2} = \text{const}_2 = R_2, \quad (7.26)$$

где  $V$  и  $W$  – текущие номера точек плана в двух подмножествах опытов  $N_0$  и  $n_0$  из их общего количества  $N$ , относящихся к двум разным концентрическим сферам. Одна из сфер может быть вырожденной, когда  $R_2=0$ .

Рассмотрим план ротатабельного эксперимента второго порядка для  $n=2$ , матрица которого приведена в табл. 7.6.

Таблица 7.6

Матрица планирования ротатабельного  
центрально-композиционного плана второго порядка  
для двух факторов

Система опытов	Но- мер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$y$
Полный факторный эксперимент	1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	$y_1$
	2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	$y_2$
	3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	$y_3$
	4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_4$
Опыт в «звездных» точках	5	+1	+1,414	0	0	2	0	$y_5$
	6	+1	-1,414	0	0	2	0	$y_6$
	7	+1	0	+1,414	0	0	2	$y_7$
	8	+1	0	-1,414	0	0	2	$y_8$
Опыт в центре плана	9	+1	0	0	0	0	0	$y_9$
	10	+1	0	0	0	0	0	$y_{10}$
	11	+1	0	0	0	0	0	$y_{11}$
	12	+1	0	0	0	0	0	$y_{12}$
	13	+1	0	0	0	0	0	$y_{13}$

Коэффициенты уравнения регрессии и дисперсии определяются по следующим формулам:

$$b_0 = \frac{A}{N} \left[ 2\lambda^2 (n+2)(oy) - 2\lambda c \sum_{i=1}^n (iiy) \right]; \quad (7.27)$$

$$b_i = (c/N)(iy); \quad (7.28)$$

$$b_{ii} = \frac{A}{N} \left[ c^2 [(n+2)\lambda - n](iiy) + c^2 (1-\lambda) \sum_{i=1}^n (iiy) - 2\lambda c(oy) \right]; \quad (7.29)$$



$$b_{iu} = \frac{c^2}{N\lambda}(iuy); \quad (7.30)$$

$$S_{b_0}^2 = \frac{2A\lambda^2(n+2)}{N} S_{\text{воспр}}^2; \quad (7.31)$$

$$S_{b_{ii}}^2 = \frac{A[(n+1)\lambda - (n-1)c^2]}{N} S_{\text{воспр}}^2; \quad (7.32)$$

$$S_{bu}^2 = \frac{c^2}{\lambda N} S_{\text{воспр}}^2, \quad (7.33)$$

где

$$(oy) = \sum_{j=1}^N x_{0j} y_j; \quad (7.34)$$

$$(iuy) = \sum_{j=1}^N x_{ij} x_{uj} y_j; \quad (7.35)$$

$$(iy) = \sum_{j=1}^N x_{ij} y_j; \quad (7.36)$$

$$(i iy) = \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 y_j; \quad (7.37)$$

$$C = \frac{n}{\sum_{j=1}^N x_{ij}^2}, \quad (7.38)$$

$$A = \frac{1}{2\lambda[(k+2)\lambda - n]}, \quad (7.39)$$

$$\lambda = \frac{Nn}{(n+2)N_i} = \frac{n(N_i + N_o)}{(n+2)N_i}, \quad (7.40)$$

где  $N_o$  – число опытов в центре плана;  $N_i$  – число остальных опытов.

Матрица ротатабельного планирования оказалась не ортогональной, так как

$$\sum_{j=1}^N x_{0j} x_{uj}^2 \neq 0; \quad \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 x_{uj}^2 \neq 0; i \neq u.$$

Следовательно, если какой-либо из квадратических эффектов оказался незначимым, то после его исключения коэффициенты уравнения регрессии необходимо пересчитать заново.

При использовании ротатабельных планов второго порядка дисперсию воспроизводимости можно определить по опытам в центре плана.

Определяют остаточную сумму квадратов по формуле

$$S_1^2 = \sum_{j=1}^N (y_j - \bar{y}_j)^2, \quad (7.41)$$

с числом степеней свободы  $m_1 = N - l = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ .

По опытам в центре плана определяют сумму квадратов востроизводимости:

$$S_2^2 = \sum_{j=1}^{N_0} (y_{0j} - \bar{y}_{0j})^2, \quad (7.42)$$

с числом степеней свободы  $m_2 = N_0 - 1$ .

Далее, находят сумму квадратов, характеризующих неадекватность:

$$S_3^2 = S_1^2 - S_2^2, \quad (7.43)$$

число степеней свободы которой  $m_3 = m_1 - m_2 = N - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - (N_0 - 1)$ .

Адекватность модели проверяют по F-критерию:

$$F = \frac{S_3^2 / m_3}{S_2^2 / m_2}. \quad (7.44)$$

Модель адекватна, если  $F < F_{\alpha; m_3; m_2}$ .

Если модель второго порядка оказалась неадекватна, то необходимо повторить эксперименты на меньшем интервале варьирования факторов или перенести центр плана в другую точку факторного пространства. В случае, когда адекватность модели по-прежнему не достигается, рекомендуется перейти к планам третьего порядка.

## 8. НЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ ТРЕХУРОВНЕВЫЙ ПЛАН ВТОРОГО ПОРЯДКА БОКСА-БЕНКИНА

В большинстве случаев целью исследования является получение математического описания изучаемого процесса. Как отмечалось выше, в случае неадекватности полинома второго порядка переходят к планированию третьего порядка и описывают исследуемый процесс полиномом третьей степени.

Боксом и Бенкиным для числа факторов от 3 до 7 предложен ценный в практическом отношении класс некомпозиционных планов второго порядка. Эти планы представляют собой определенные выборки строк из полного факторного эксперимента (ПФЭ) типа  $3^k$  (где  $k=3$ ), где каждый фактор варьируется на трех уровнях: +1, 0, -1, а в центральных композиционных ротатабельных планах второго порядка факторы варьируются на пяти уровнях. Смена уровней в процессе экспериментирования усложняет эксперимент и увеличивает его стоимость.

Некомпозиционные планы характеризуются наличием в строках матрицы планирования большого числа нулей (т.е. факторов на основном уровне), в результате чего существенно упрощается вычисление коэффициентов регрессии модели.

Некомпозиционные планы для 3, 4, 6 и 7 факторов требуют постановки меньшего числа опытов по сравнению с соответствующими ротатабельными центральными композиционными планами второго порядка (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Числа опытов, предусмотренные некомпозиционными планами  
и центральными композиционными ротатабельными планами  
второго порядка

Число факторов	3	4	5	6	7
Некомпозиционный план (выборка из плана типа $3^k$ )	15	27	46	54	62
Центральный композиционный ротатабельный план второго порядка	20	31	32	58	92

Схема некомпозиционного плана второго порядка для трех факторов изображена на рис.8.1.

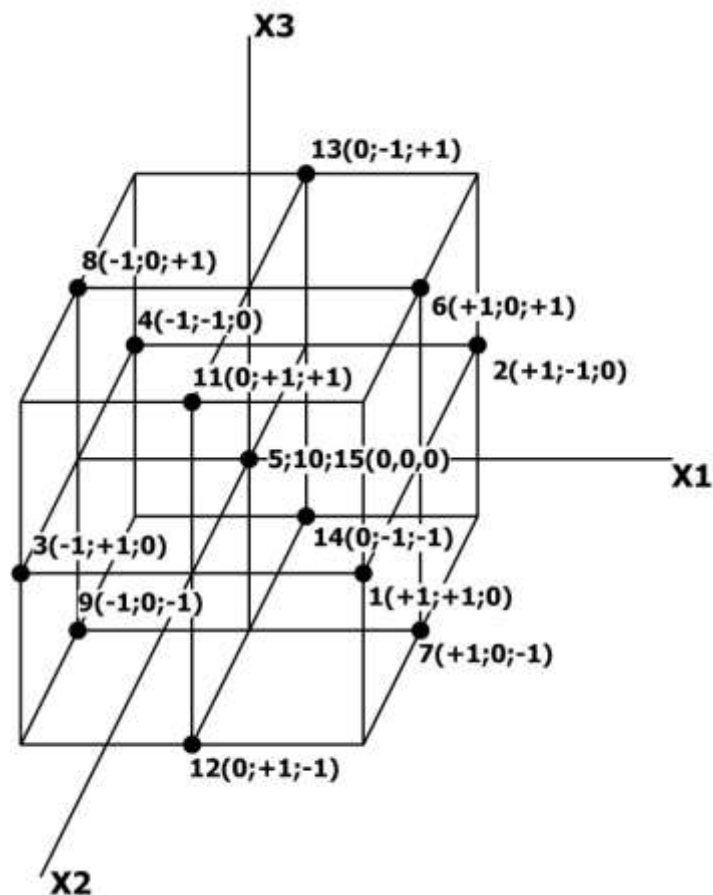


Рис. 8.1. Некомпозиционный план второго порядка Бокса-Бенкина для трех факторов (выборка из плана эксперимента  $3^3$ )

Матрица плана эксперимента Бокса-Бенкина представлена в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Матрица некомпозиционного плана второго порядка для трех факторов (выборка из плана эксперимента  $3^3$ )

Номер опыта	Факторы и их взаимодействия										Отклик $y$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	
1	+1	+1	+1	0	+1	0	0	+1	+1	0	$y_1$
2	+1	+1	-1	0	-1	0	0	+1	+1	0	$y_2$
3	+1	-1	+1	0	-1	0	0	+1	+1	0	$y_3$
4	+1	-1	-1	0	+1	0	0	+1	+1	0	$y_4$
5	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$y_5$

Окончание табл. 8.2

6	+1	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	$y_6$
7	+1	+1	0	-1	0	-1	0	+1	0	+1	$y_7$
8	+1	-1	0	+1	0	-1	0	+1	0	+1	$y_8$
9	+1	-1	0	-1	0	+1	0	+1	0	+1	$y_9$
10	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$y_{10}$
11	+1	0	+1	+1	0	0	+1	0	+1	+1	$y_{11}$
12	+1	0	+1	-1	0	0	-1	0	+1	+1	$y_{12}^2$
13	+1	0	-1	+1	0	0	-1	0	+1	+1	$y_{13}$
14	+1	0	-1	-1	0	0	+1	0	+1	+1	$y_{14}$
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$y_{15}$

Некомпозиционный план второго порядка для трех факторов предусматривает проведение 15 опытов (15 строк в матрице плана), причем три опыта (табл. 8.2, опыты 5; 10; 15) проводятся в центре плана, т. е. при нахождении всех факторов на нулевых (основных) уровнях ( $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ).

Рассмотренные Боксом и Бенкиным некомпозиционные планы для числа факторов от 3 до 7 имеют высокую степень ортогональности: только свободный член  $b_0$  и коэффициенты  $b_{ij}$  при квадратичных членах коррелированы друг с другом.

При 4 и 7 факторах указанные планы являются ротатабельными, а при другом числе факторов эти планы являются почти ротатабельными.

Трехфакторный эксперимент по плану Бокса-Бенкина проводят согласно матрице (табл. 8.2) с  $m$ -кратной повторностью каждого опыта (каждой строки матрицы).

Оценка однородности дисперсий производится по критерию Кохрена:

$$G_p = \frac{S_{i \max}^2}{\sum_{i=1}^N S_i^2}. \quad (8.1)$$

Среди всей совокупности рассчитанных построчных дисперсий выбирается максимальная  $S_{i \max}^2$  и берется отношение данной дисперсии к сумме всех построчных дисперсий  $\sum_{i=1}^N S_i^2$ , т.е. определяется расчетное значение критерия Кохрена.

С критерием  $G_p$  связаны степени свободы: для числителя  $f_1 = m - 1$ , для знаменателя  $f_2 = N$ . Для заданной доверительной вероятности  $\alpha$  по значениям  $f_1$  и  $f_2$  определяется критическое табличное значение критерия Кохрена  $G_T$ , с которым сравнивают расчетное. Если выполняется условие  $G_p < G_T$ , то с выбранным уровнем статистической значимости  $\alpha$  (с достоверностью  $1 - \alpha$ ) все построчные дисперсии признаются однородными. В противном случае гипотезу отвергают.

Коэффициенты уравнения регрессии по плану Бокса-Бенкина определяются по следующим выражениям:

$$b_0 = \frac{1}{3}(\bar{y}_5 + \bar{y}_{10} + \bar{y}_{15}); \quad (8.1)$$

$$b_1 = \frac{1}{8}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - \bar{y}_3 - \bar{y}_4 + \bar{y}_6 + \bar{y}_7 - \bar{y}_8 - \bar{y}_9); \quad (8.2)$$

$$b_2 = \frac{1}{8}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 - \bar{y}_4 + \bar{y}_{11} + \bar{y}_{12} - \bar{y}_{13} - \bar{y}_{14}); \quad (8.3)$$

$$b_3 = \frac{1}{8}(\bar{y}_6 - \bar{y}_7 + \bar{y}_8 - \bar{y}_9 + \bar{y}_{11} - \bar{y}_{12} + \bar{y}_{13} - \bar{y}_{14}); \quad (8.4)$$

$$b_{12} = \frac{1}{4}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3 + \bar{y}_4); \quad (8.5)$$

$$b_{13} = \frac{1}{4}(\bar{y}_6 - \bar{y}_7 - \bar{y}_8 + \bar{y}_9); \quad (8.6)$$

$$b_{23} = \frac{1}{4}(\bar{y}_{11} - \bar{y}_{12} - \bar{y}_{13} + \bar{y}_{14}); \quad (8.7)$$

$$C = \frac{1}{8} \left( \sum_{i=1}^{15} \bar{y}_i - 7b_0 \right); \quad (8.8)$$

$$b_{11} = C - 0,25 \sum_{11}^{14} \bar{y}_i; \quad (8.9)$$

$$b_{22} = C - 0,25 \sum_6^9 \bar{y}_i ; \quad (8.10)$$

$$b_{33} = C - 0,25 \sum_1^4 \bar{y}_i , \quad (8.11)$$

где  $\bar{y}_i$  – среднее значение параметра оптимизации (выхода) при  $m$ -кратной повторности каждого опыта.

Оценкой генеральной дисперсии воспроизводимости, характеризующей точность одного измерения, является средняя из всех построчных дисперсий. Дисперсия воспроизводимости откликов (дисперсия параметра оптимизации) определяется по формуле

$$S_{\text{вос}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N S_i^2}{N} . \quad (8.12)$$

Среднее квадратическое отклонение для коэффициентов уравнений регрессий определяется по формуле

$$S_{b_i} = \sqrt{\frac{S_{\text{вос}}^2}{m \cdot N}} . \quad (8.13)$$

Значимость коэффициентов регрессии проверяют с помощью критерия Стьюдента:

$$t_i = \frac{|b_i|}{S_{b_i}} . \quad (8.14)$$

Расчетные значений коэффициентов Стьюдента для каждого коэффициента регрессии сравнивают с табличным значением, которое определяется по заданной доверительной вероятности  $\alpha$  и числу степеней свободы  $f = N(m - 1)$ . При уровне статистической значимости  $\alpha = 0,05$  и числе степеней свободы  $f = 15 (3 - 1) = 30$  (для плана Бокса-Бенкина) определим табличное значение коэффициента. Для описанных выше условий  $t_{\text{табл}} = 2,04$ .

Если расчетное значение больше табличного, то можно говорить о значимости коэффициента, незначимые исключаются и не используются при составлении уравнения регрессии.

После определения всех коэффициентов регрессии и установления их значимости составляют уравнения регрессии, подставляя числовые значения коэффициентов регрессии.

Адекватность полученной модели проверяют по F – критерию:

$$F_p = \frac{S_{ad}^2}{S_{вос}^2}. \quad (8.15)$$

Дисперсию адекватности рассчитывают по формуле

$$S_{ad}^2 = \frac{m}{N-l} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - y_{расч})^2, \quad (8.16)$$

где  $l$  – число значимых коэффициентов регрессии.

Для заданной доверительной вероятности  $\alpha$  по значениям  $f_1 = N - l$  и  $f_2 = N(m - 1)$  определяется табличное значение критерия Фишера  $F_T$ . Если  $F_T < F_p$ , то полученная регрессионная модель с принятым уровнем статистической значимости  $\alpha$  адекватна экспериментальным данным.

Если модель адекватна, то осуществляем переход от безразмерного полинома к размерному полиному. Для этого в безразмерный полином подставим выражения для кодированных факторов, после чего раскрываем все скобки и приводим подобные слагаемые, получим уравнения в натуральном виде.

*Пример. Предмет исследования* – закономерности движения семян в семяпроводе усовершенствованного пневматического высевающего аппарата пропашной сеялки.

*Основной задачей экспериментального исследования* являлось определение скорости семян на выходе из семяпровода высевающего аппарата (рис. 8.2, а, поз. 3).

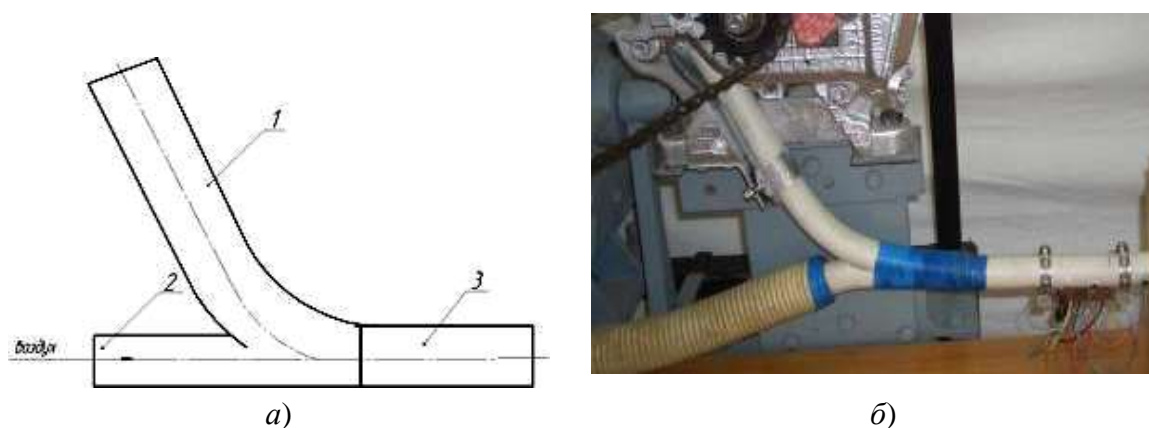


Рис. 8.2. Экспериментальный семяпровод с ускорителем семян к сеялке точного высева (типа СУПН-8А): 1 – прямолинейный участок; 2 – нагнетательный участок; 3 – ускорительный участок



Скорость измеряется с помощью специализированной системы измерения скорости семян на выходе из семяпровода, состоящей из двух фотоэлектрических (рис. 8.2, б; рис. 8.3, поз. 2 и 3) датчиков, установленных на расстоянии друг от друга по ходу движения семени, и блока управления, подающего импульс на персональный компьютер, для обработки и визуализации результата.

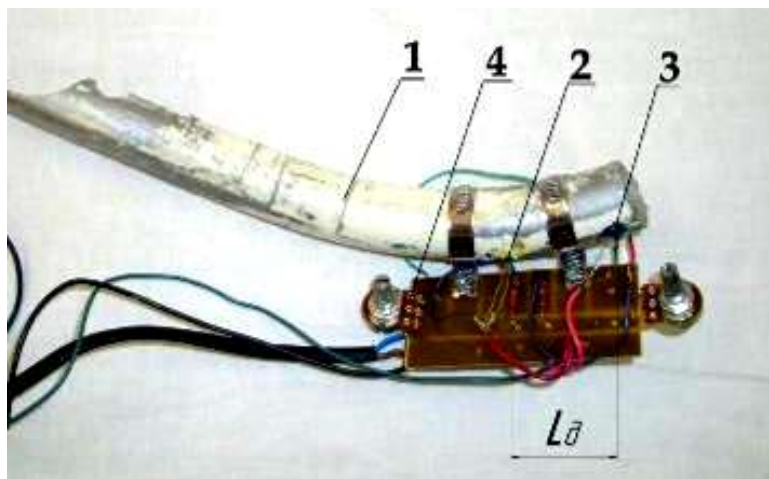


Рис. 8.3. Экспериментальный семяпровод с датчиками:  
1 – экспериментальный семяпровод; 2 – первый датчик;  
3 – второй датчик; 4 – блок управления

На основании анализа априорной информации выявлено 11 факторов, влияющих на параметр оптимизации  $y$  (скорость семян на выходе с семяпровода –  $v_{к3}$ ). Проведен анализ степеней влияния факторов на результат, их ранжирование и выявлены 3 основных фактора  $x_1, x_2$  и  $x_3$ :  $v_g$  – скорость воздушного потока в ускорителе;  $l_3$  – длина ускорителя;  $\omega$  – угловая скорость высевающего диска.

Параметром оптимизации является скорость семени на выходе из семяпровода ( $v_{к3}$ ) (см. рис. 8.2, а, поз. 3), для определения значений которого был проведен трехфакторный эксперимент с использованием некомпозиционного трехуровневого плана второго порядка Бокса-Бенкина, матрица которого представлена в табл. 8.2.

Оценка однородности дисперсий производилась по критерию Кохрена, результаты проверки гипотезы однородности дисперсий подтвердили при 5% уровне значимости достоверность полученных зна-

чений параметра оптимизации и отсутствие грубых ошибок при проведении эксперимента, так как опытное значение (0,324) критерия Кохрена меньше табличного (0,432).

Значение дисперсии воспроизводимости  $\sigma_{\text{вос}}^2 = 0,00063$  характеризует внутреннюю стабильность и управляемость исследуемого объекта.

Значения коэффициентов регрессии и расчетные значения критерия Стьюдента приведены в табл. 8.3.

Таблица 8.3

Значения коэффициентов регрессии и значений критерия Стьюдента

Обозначение коэффициентов регрессии	y		
	Значение коэффициентов регрессии	Расчетное значение критерия Стьюдента $t_i$	Табличное значение критерия Стьюдента $t_{\text{табл}}$
$b_0$	2,3633	626,5429	2,13
$b_1$	0,7205	191,0116	
$b_2$	0,2779	73,66739	
$b_3$	<b>0,0014</b>	0,364526	
$b_{12}$	0,1538	40,76063	
$b_{13}$	<b>0,0002</b>	0,066277	
$b_{23}$	<b>0,0015</b>	0,397665	
$b_{11}$	0,0433	11,48809	
$b_{22}$	-0,0209	5,54521	
$b_{33}$	0,0136	3,601075	

Для коэффициентов регрессии среднее квадратическое отклонение  $\sigma_{b_i} = 0,0037$ . Значимость коэффициентов регрессии проверена с помощью критерия Стьюдента  $t_i$ , табличное значение которого при  $\alpha = 0,95$  составляет  $t_{\text{табл}} = 2,12$ . Из полученных данных критерия Стьюдента видно, что значения коэффициентов  $b_3$ ,  $b_{13}$  и  $b_{23}$  меньше таб-

личного значения критерия Стьюдента  $t_{табл}$ , тогда можно принять эти коэффициенты незначимыми.

С учетом значений и значимости коэффициентов регрессии получена модель процесса высева семян кукурузы с применением семяпровода с ускорителем, уравнение регрессии которых характеризует зависимость  $y$  от факторов  $x_1, x_2$  и  $x_3$ :

$$y = 2,3633 + 0,7205x_1 + 0,2779x_2 + 0,1538x_1x_2 - 0,0433x_1^2 - 0,0209x_2^2 + 0,0136x_3^2.$$

Уравнение устанавливает зависимость между параметром оптимизации – скоростью семян на выходе из семяпровода с ускорителем ( $y$ ) от скорости воздушного потока  $x_1$ , длины ускорителя семяпровода  $x_2$  и угловой скорости высевающего диска  $x_3$ .

Уравнение регрессии после раскодирования имеет вид:

$$v_{кз} = 0,6315 + 0,0770 v_{\epsilon} - 0,9983 l_3 + 0,6408 v_{\epsilon} \cdot l_3 - 0,0012 v_{\epsilon}^2 - 13,0625 l_3^2 + 0,0136 \omega^2.$$

Адекватность этой математической модели проверена по критерию Фишера. Установлено, что  $F_p < F_{табл}$  ( $1,85 < 2,3$ ), следовательно, полученная математическая модель – адекватна.

Уравнение регрессии после раскодирования имеет вид:

$$v_{кз} = 0,6315 + 0,0770 v_{\epsilon} - 0,9983 l_3 + 0,6408 v_{\epsilon} \cdot l_3 - 0,0012 v_{\epsilon}^2 - 13,0625 l_3^2 + 0,0136 \omega^2. \quad (4.3)$$

Геометрической интерпретацией математической модели является поверхности отклика (например, рис. 8.4) и двумерные сечения поверхностей отклика (рис. 8.5).

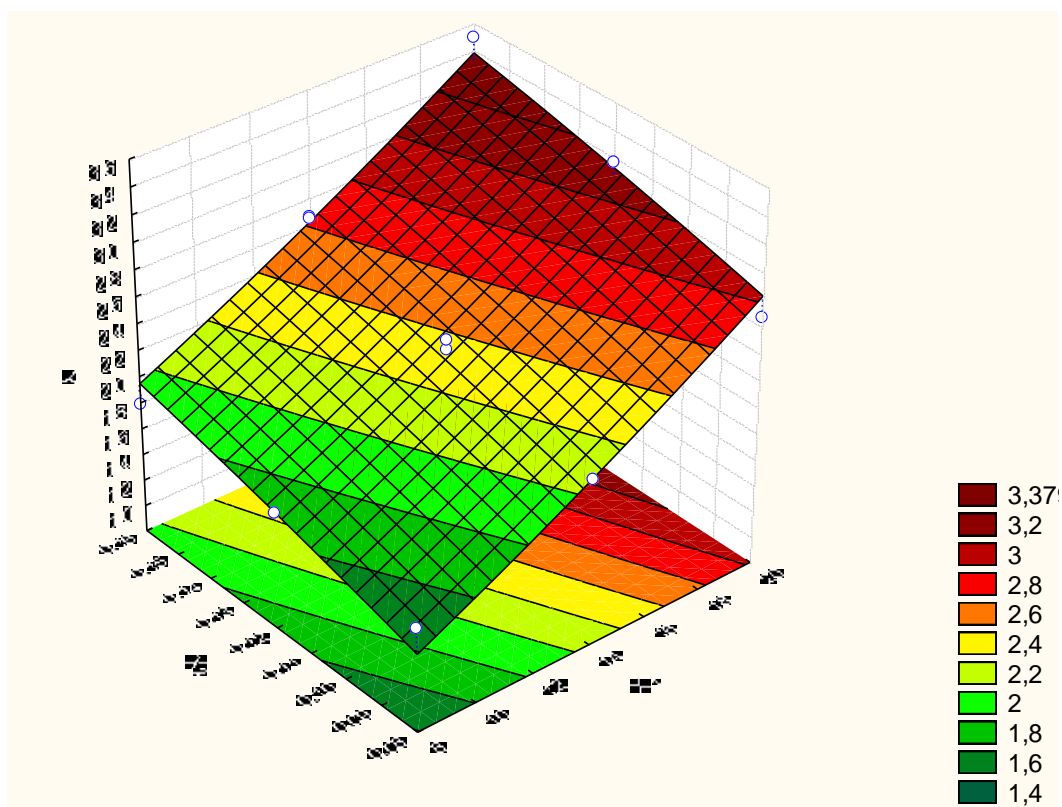


Рис. 8.4. Зависимость скорости семян на выходе из семяпровода  $u$  от скорости воздушного потока  $x_1$  и длины ускорителя  $x_2$  при постоянной угловой скорости высевающего диска  $\omega=3$  рад/с ( $x_3=0$ )

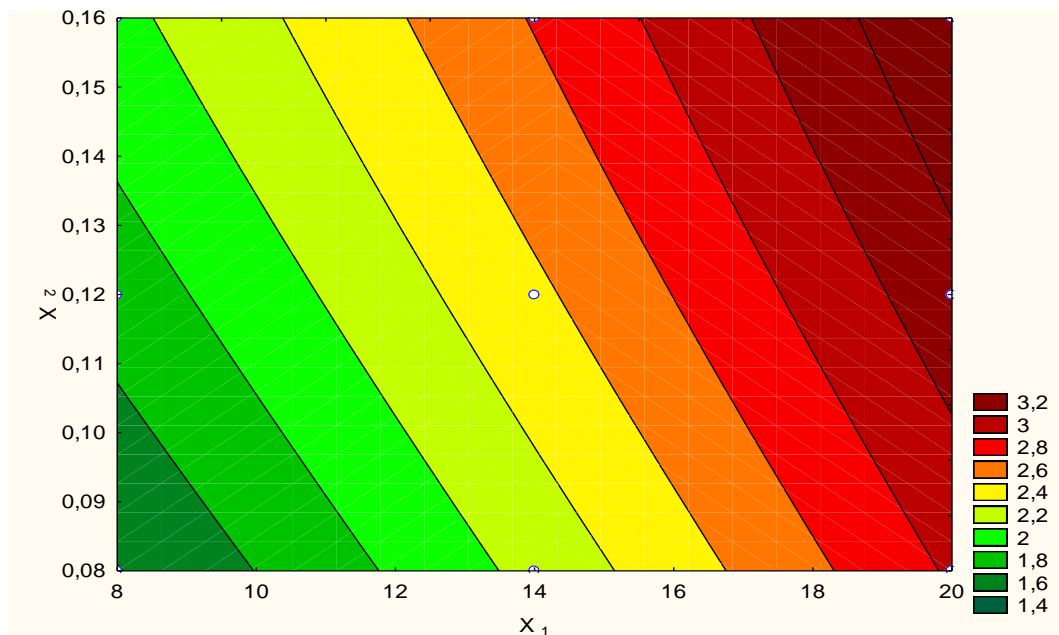


Рис. 8.5. Изолинии скорости семени на выходе из семяпровода  $u$  при  $x_3=0$  ( $\omega=3$  рад/с)

Анализ поверхности отклика и изолиний скорости семени на выходе из семяпровода при постоянной угловой скорости высевающего диска  $\omega=3$  рад/с ( $x_3=0$ ) показал, что обеспечить скорость семени на выходе из ускорителя семяпровода (параметр оптимизации) можно сочетанием длины ускорителя и скорости воздушного потока в нем. Созданием скорости воздушного потока в семяпроводе 8 м/с ( $x_1=-1$ ) при длине ускорителя 0,16 м ( $x_2=+1$ ) можно добиться скорости семян на выходе из ускорителя 2 м/с (что соответствует скорости движения агрегата около 7 км/ч). При длине ускорителя 0,16 м ( $x_2=+1$ ) получить скорость семян, равной 3..3,2 м/с (что соответствует скорости движения агрегата около 11 км/ч), можно путем увеличения скорости воздушного потока в ускорителе до 20 м/с ( $x_1=+1$ ). Однако обеспечить значение  $x_2=0,16$  м возможно в конструкции отдельных пропашных сеялок (например, СУПП, УПС), в сеялке СУПН-8А наиболее рациональным значением является  $x_2=0,12$  м (что связано с конструкцией сошника). Тогда для сеялок СУПН-8А рекомендуемая длина ускорителя 0,12 м. При угловой скорости вращения высевающего диска 3 рад/с ( $x_3=0$ ) в сеялке СУПН, для обеспечения скорости семян на выходе из ускорителя семяпровода 2 м/с необходимо создать скорость воздушного потока в нем 12 м/с, а для скорости семян 3 м/с - увеличить скорость воздушного потока до 20 м/с.

Из анализа уравнений и изолиний равного отклика следует:

– угловая скорость высевающего диска  $\omega$  незначительно влияет на изменение скорости семян на выходе из ускорителя семяпровода ( $v_{кз}$ ), поэтому в практических расчетах можно принимать ее за величину постоянную. Поскольку от частоты вращения диска зависит качество дозирования высевающим аппаратом, то ее численное значение определяется с учетом этого условия и составляет  $\omega=2,5...3$  рад/с;

– влияние длины ускорителя семяпровода  $l_3$  на параметр оптимизации ( $U_{кз}$ ) наиболее динамично проявляется в пределах 0,06...0,13 м. Дальнейшее увеличение этого фактора сказывается в меньшей степени. Для сеялки СУПН, с учетом конструктивных особенностей, принимаем длину ускорителя  $l_3=0,12$  м;

– скорость воздушного потока  $U_в$  в ускорителе семяпровода является наиболее значимым фактором, и для обеспечения параметра оптимизации в пределах 2...3,5 м/с должна варьироваться в диапазоне 10...20 м/с при длине ускорителя семяпровода  $l_3=0,12$  м (рекомендовано для сеялки СУПН-8А).

## 9. МЕТОДЫ ОРГАНИЗАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПРИ ПОИСКЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

ПФЭ иДФЭ представляют возможность исследователю подбирать полиномиальные модели для описания локальных областей поверхности отклика, отражающей функциональную структуру объекта. Изменяя координаты базовой точки (основного уровня факторов), можно изучить весь рельеф поверхности отклика в области определения входных переменных объекта. Цели такого изучения могут быть различными. Так, например, может быть поставлена цель определения состояний объекта при различных значениях входных переменных. Однако в подавляющем большинстве цель исследования в той или иной мере связывается с поиском таких значений входных переменных, при которых достигается экстремальное значение выходной переменной, *показателя оптимизации*.

Рассматривая задачу оптимизации с позиций экспериментального изучения поверхности отклика, можно говорить об организации некоторой целенаправленной стратегии эксперимента, позволяющей выйти по поверхности отклика в область экстремума, например  $y_{max}(x)$ .

Весь класс подобных задач характеризуется тем, что экспериментатора интересует уже не модель изучаемого объекта, а сама процедура поиска области пространства входных переменных, где достигается наилучший выход с объекта.

Далеко не всегда можно построить математическую модель для стратегии поиска. Во многих случаях приходится просто ограничиваться описанием логических действий в эксперименте, чтобы лучше вести поиск.

### 9.1. Метод покоординатной оптимизации

Процесс поиска оптимума методом покоординатной оптимизации в графическом виде для двумерного случая представлен на рис. 9.1. По этому методу выбирают произвольную точку  $M_0$  и определяют ее координаты. Поиск оптимума осуществляется поочередным

варьированием каждого из факторов. При этом сначала изменяют один фактор ( $x_1$ ) при фиксированных остальных ( $x_2=\text{const}$ ) до тех пор, пока не прекращается прирост функции отклика (точка  $M_1$ ). В дальнейшем изменяется другой фактор ( $x_2$ ) при фиксированных остальных ( $x_1=\text{const}$ ), и далее процедура повторяется.

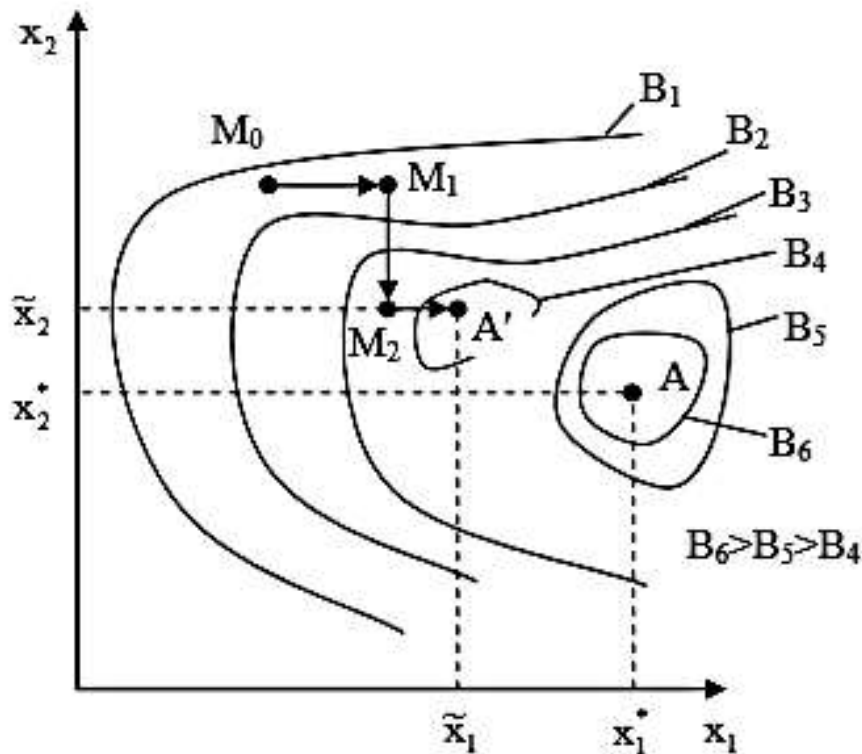


Рис. 9.1. Метод покоординатной оптимизации

Данный метод весьма прост, однако при большом числе факторов требуется значительное число опытов, чтобы достичь координат оптимума. Более того, при зависимостях  $y=f(x_1, \dots, x_2)$  этот метод может привести к ложному результату. На рис. 9.1 показал один из таких частных случаев, когда поочередное изменение каждого из факторов в любую сторону вдоль координатных осей  $x_1$  и  $x_2$  вызывает уменьшение  $y$ . В результате решения находится ложный экстремум, находящийся в точке  $A'$  с координатами  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ , в то время как действительное значение максимума  $y_{\max}$  находится в точке  $A$  с координатами  $x_1^*$  и  $x_2^*$ .



## 9.2. Метод крутого восхождения по поверхности отклика

По результатам ПФЭ или ДФЭ мы получили  $N$  значений параметра оптимизации  $y_i$ .

Для линейной математической модели

$$y = b_0 x_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i,j=1}^n b_{i,j} x_i x_j. \quad (9.1)$$

Коэффициенты рассчитываются по формуле

$$b_i = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ij} y_i}{N}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (9.2)$$

Геометрическая интерпретация уравнения (9.1) заключается в том, что математическая модель для двухфакторного эксперимента представляет собой уравнение плоскости, касательной к поверхности отклика в точке нулевого уровня, а коэффициенты  $b_j$  – коэффициенты наклона этой плоскости к соответствующим координатным осям. Коэффициенты при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если минус, то уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе фактора с нулевого уровня на верхний или нижний.

По математическому смыслу коэффициенты  $b_j$  – есть приближенные значения составляющих вектора градиента функции отклика:

$$\overline{grad} y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \vec{j} + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_k} \vec{k}. \quad (9.2)$$

Известно, что наиболее короткий путь к экстремуму – в направлении градиента функции отклика  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

По этим значениям можно определить направление линии крутого восхождения (спуска) для данной точки нулевого уровня. Уравнение (9.1), если его записать для значений факторов в абсолютных единицах, будет иметь вид

$$\tilde{y} = b_0 + b_1 \frac{\tilde{x}_1 - x_{10}}{\Delta x_1} + b_2 \frac{\tilde{x}_2 - x_{20}}{\Delta x_2} + \dots + b_n \frac{\tilde{x}_n - x_{n0}}{\Delta x_n}, \quad (9.3)$$

где  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$  – значения факторов в абсолютных единицах;  
 $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$  – значения факторов в абсолютных единицах в точке нулевого уровня;  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  – интервалы варьирования факторов.

Для того чтобы начать крутое восхождение по поверхности отклика, моделируемой уравнением (9.3), необходимо рассчитать *шаги крутого восхождения*  $J_i$  для каждого фактора.

*Шагами крутого восхождения* называют величины приращений значений факторов при движении по поверхности отклика к области оптимума. Очевидно, что шаги должны быть пропорциональны коэффициентам  $b_j$  линейной математической модели, рассчитанным по результатам ПФЭ или ДФЭ :

$$J_j = m \cdot b_j. \quad (9.4)$$

Выбор коэффициента пропорциональности  $m$ , который *называют масштабом шагов крутого восхождения*, – задача достаточно сложная. Масштаб выбирается исходя из наиболее значимого коэффициента  $b_j$ . От того, как будет выбран масштабный коэффициент  $m$ , будет зависеть количество необходимых шагов крутого восхождения. С одной стороны, особенно при проведении физического эксперимента, необходимо стремиться к минимизации опытов, но с другой стороны, появляется опасность «перешагнуть» область оптимума. В расчетных экспериментах, где количество шагов не так критично, масштаб  $m$  выбирается минимальным. Результаты выбора шагов обычно записывают в виде таблицы (табл. 9.1).

Таблица 9.1

Выбор шагов крутого восхождения

$b_0$	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	$J_1=mb_1$	$J_2=mb_2$	...	$J_k=mb_n$

Отметим, что масштаб шагов крутого восхождения  $m$  один для всех факторов.

Так же, как и коэффициенты  $b_j$ , шаги крутого восхождения  $J_j$  могут быть как положительными, так и отрицательными. Положительное значение  $J_j$  означает, что соответствующий фактор  $x_j$  должен увеличивать свое значение при поиске максимума параметра оптимизации, а отрицательное, что значение фактора должно уменьшаться.

*Алгоритм крутого восхождения.* Крутое восхождение по поверхности отклика должно начинаться из точки нулевого уровня, а не из точки с лучшим значением параметра оптимизации в ПФЭ, как может показаться на первый взгляд. Это наглядно иллюстрирует рис. 9.2. Лучшее значение, полученное в ПФЭ, –  $y_1$ . Однако движение по градиенту из этой точки не ведет к вершине поверхности отклика, а начало движения из центра плана дает лучший результат.

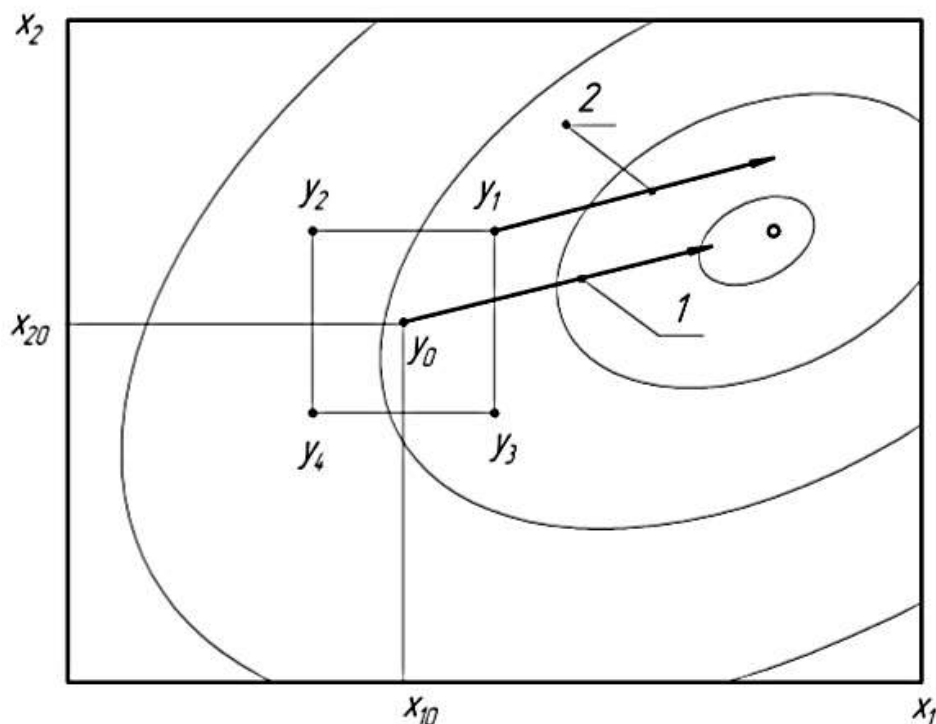


Рис. 9.2. Начало крутого восхождения из центра плана (точки нулевого уровня) - 1 и из лучшей точки плана - 2

Алгоритм крутого восхождения удобно оформлять в виде таблицы (табл. 9.2).

Таблица 9.2

## Крутое восхождение по поверхности отклика

Номер шага	$x_1$	$x_2$	....	$x_n$	$\tilde{y}$	$y$
0	$x_{10}$	$x_{20}$	....	$x_{n0}$	$\tilde{y}_0$	$y_0$
1	$x_{10} + J_1$	$x_{20} + J_2$	....	$x_{n0} + J_n$	$\tilde{y}_1$	$y_1$
2	$x_{10} + 2J_1$	$x_{20} + 2J_2$	....	$x_{n0} + 2J_n$	$\tilde{y}_2$	$y_2$
3	$x_{10} + 3J_1$	$x_{20} + 3J_2$	....	$x_{n0} + 3J_n$	$\tilde{y}_3$	$y_3$
4			....	....	....	....
5	$x_{10} + nJ_1$	$x_{20} + nJ_2$	....	$x_{n0} + nJ_n$	$\tilde{y}_n$	$y_n$

Суть алгоритма восхождения сводится к тому, что на каждом последующем шаге к значению фактора прибавляется шаг крутого восхождения  $J_j$  до тех пор, пока параметр оптимизации  $y$  растет, если цель оптимизации – поиск максимума  $y$ . Восхождение приостанавливается, если на последующем шаге получится худшее значение параметра оптимизации, чем на предыдущем. Одновременно со значением параметра оптимизации  $y$  целесообразно рассчитывать и его значение  $\tilde{y}$  по формуле линейной математической модели (9.3). Расхождение соответствующих значений  $y$  покажет, насколько линейная модель адекватна.

*Алгоритм крутого восхождения* также можно описать следующей последовательностью.

➤ Планирование и постановка ПФЭ (или ДФЭ) в окрестности точки начального состояния  $x_{i0}$ .

➤ Расчет коэффициентов  $b_i$  линейной математической модели с целью определения направления градиента.

➤ Расчет произведений  $b_i \Delta x_i$ , где  $\Delta x_i$  - интервалы варьирования факторов при ПФЭ (ДФЭ).

➤ Выбор базового фактора  $x_i = x_{i0}$ , у которого  $|b_i \Delta x_i| = a = \max$ .

➤ Выбор шага крутого восхождения для базового фактора  $h_a$ .

Этот выбор проводится на основании априорной информации или с учетом опыта исследователя, технологических соображений или дру-

гих критериев. При выборе шага необходимо иметь в виду, что выбор малого шага потребует большого числа опытов при движении к оптимуму, а большой шаг создает опасность проскочить область оптимума.

➤ Расчет шагов изменения других факторов по формуле:

$$h_i = (b_i \Delta x_i) h_a / a . \quad (9.4)$$

Это соотношение между величинами шага изменения отдельных факторов обеспечивает движение по градиенту в факторном пространстве.

➤ Составление плана движения по градиенту. Для этого в соответствии с определенными значениями шагов изменения факторов и их последовательным алгебраическим суммированием с основным уровнем в точке

$$x_{in} = x_{i0} + nh_i, n = 1, 2, \dots$$

Находят координаты опытов 5, 6, 7, 8, 9, 10 (рис. 9.3). Часть этих опытов полагают «мысленными». «Мысленный» опыт заключается в получении предсказанных (расчетных) значений функции отклика по линейному уравнению регрессии, что позволяет сократить объем реальных опытов, т.е. увеличить скорость продвижения к экстремуму. Из опытных данных находят положение локального экстремума (точка  $M_1$  на рис. 9.3).

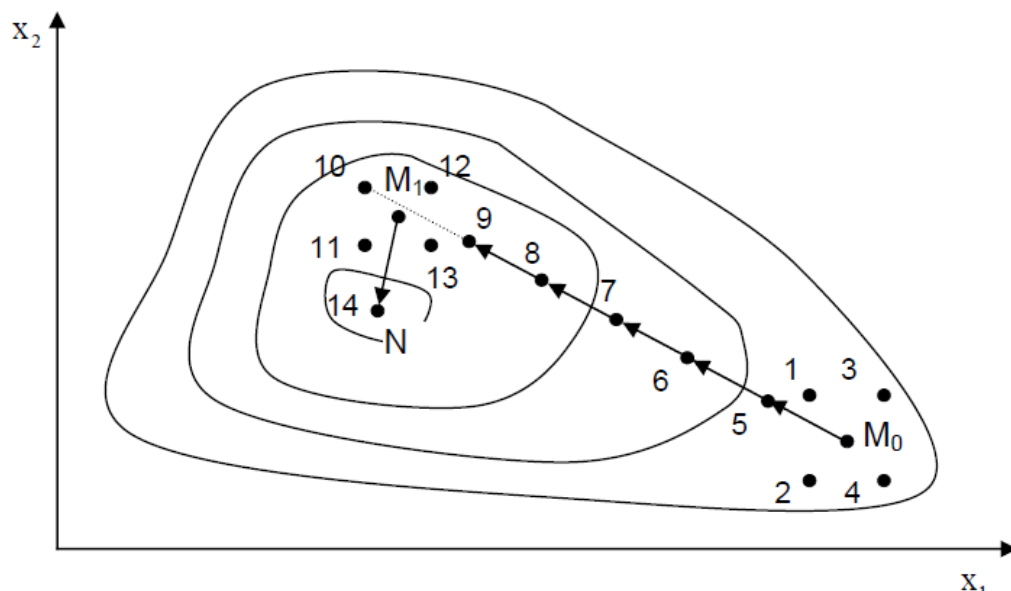


Рис. 9.3. Процесс оптимизации методом крутого восхождения

➤ В окрестности локального эксперимента ставят серию опытов

(ПФЭ и ДФЭ) для определения новых значений коэффициентов уравнения регрессии и нового направления градиента (направление  $M_1N$  на рис. 9.3). В дальнейшем процедура повторяется до достижения следующего локального экстремума и так далее вплоть до определения окрестности координат максимума функции отклика, которая носит название почти стационарной области.

Признаком достижения этой области является статистическая незначимость коэффициентов  $b_I$ . В почти стационарной области становятся значимы эффекты взаимодействия и квадратические эффекты. Здесь требуется переходить от ДФЭ (если он использовался ранее) к ПФЭ, а если и этого недостаточно, перейти от плана эксперимента первого порядка к планам второго порядка.

В задачах, где требуется определить координаты не максимума, а минимума функции отклика, знаки коэффициентов  $b_I$  следует поменять на обратные. В этом случае движение в факторном пространстве осуществляется по направлению, противоположному вектору градиента.

*Пример:* Цель оптимизации – определить минимальное значение массы активных частей трансформатора.

На рис. 9.4 представлен результат крутого спуска по поверхности отклика и по ее линейной математической модели, полученный в ходе решения учебной задачи по оптимизации массы силового трансформатора.

Из графика видно, что лучший результат соответствует 26 шагу крутого спуска. Затем результат начинает ухудшаться. Линейная модель отражает процесс с достаточной точностью только на первых четырех шагах. Из этого следует, что уточнение положения области оптимума возможно. Для этого необходимо провести новую серию опытов ПФЭ в лучшей точке, либо исследовать поверхность нелинейными планами второго порядка.

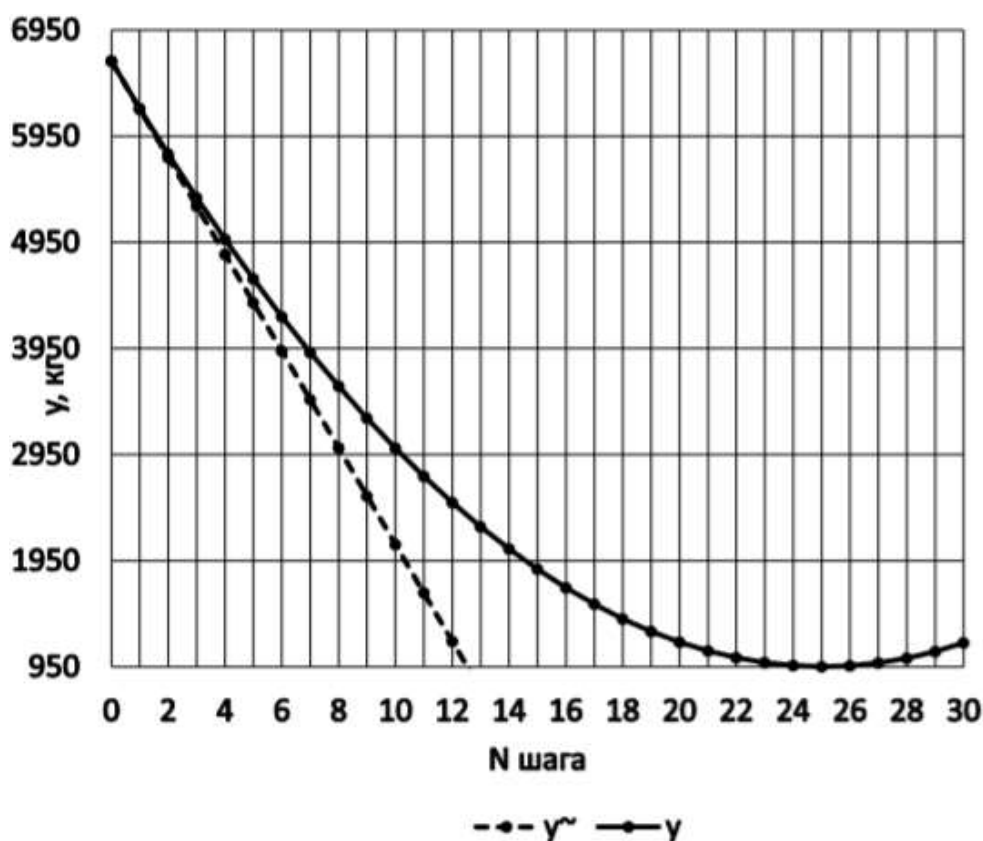


Рис. 9.4. Ход крутого спуска по поверхности отклика  $y$  и ее линейной модели  $\tilde{y}$

*Принятие решений после крутого восхождения.* После завершения крутого восхождения возникают довольно разнообразные ситуации, требующие принятия решений о дальнейших действиях.

Ситуации различаются по признаку: оказалось крутое восхождение эффективным или нет. Положение оптимума (близко, далеко, неопределенно) также имеет значение в принятии решений. В некоторых случаях нужно учитывать адекватность (или неадекватность) линейной модели.

➤ *Крутое восхождение эффективно.* Об эффективности движения по градиенту можно судить по величине параметра оптимизации. Движение по градиенту считается эффективным, если реализация мысленных опытов, рассчитанных на стадии крутого восхождения, приводит к улучшению значения параметра оптимизации по сравнению с самым хорошим результатом в матрице.

При эффективном крутом восхождении возможны два исхода:

область оптимума достигнута или область оптимума не достигнута.

*Крутое восхождение эффективно. Область оптимума достигнута.* Этот случай является самым легким в смысле принятия решений. Экспериментатор может окончить исследование, если задача заключалась в достижении области оптимума, или продолжить исследование, если задача заключалась не только в достижении области оптимума, но и в детальном ее изучении. При этом необходимо достроить линейный план до плана второго порядка и результаты эксперимента представить в виде полинома второй степени. Перечисленные два варианта принятия решений следуют из концепции Бокса–Уилсона, согласно которой задача оптимизации условно разбивается на два этапа. Первый этап – крутое восхождение с целью скорейшего достижения области оптимума. При этом используется линейное планирование. Линейный план может использоваться один или несколько раз в зависимости от интенсивности продвижения. Второй этап – описание области оптимума методами нелинейного планирования. При эффективном крутом восхождении весьма часто удастся быстро приблизиться к области оптимума (совершить крутое восхождение один раз). Исследователь попадает в область оптимума, которая не может быть описана линейным приближением, и движение по методу крутого восхождения заканчивается. Завершается первый этап оптимизации. Метод крутого восхождения не решает вопроса о самой лучшей точке поверхности отклика, об экстремуме. Чтобы изучить область оптимума, необходимо перейти ко второй стадии планирования – к исследованию почти стационарной области. В принятии решений мы должны рассматривать и этот вариант.

*Крутое восхождение эффективно. Область оптимума не достигнута.* В этом случае строится линейный план следующего цикла и исследование продолжается.



При построении линейного плана второго цикла, прежде всего, возникает вопрос о выборе центра эксперимента. Самая простая рекомендация – расположить центр нового плана в той части факторного пространства, которая соответствует условиям наилучшего опыта при крутом восхождении.

➤ *Крутое восхождение неэффективно.* Принимать решения при неэффективном движении по градиенту гораздо сложнее. Принятие решений во многом зависит от определенности ситуации (далеко от оптимума, близко, неопределенно) и от адекватности линейной модели. Наиболее типичные случаи показаны на рис. 9.5.

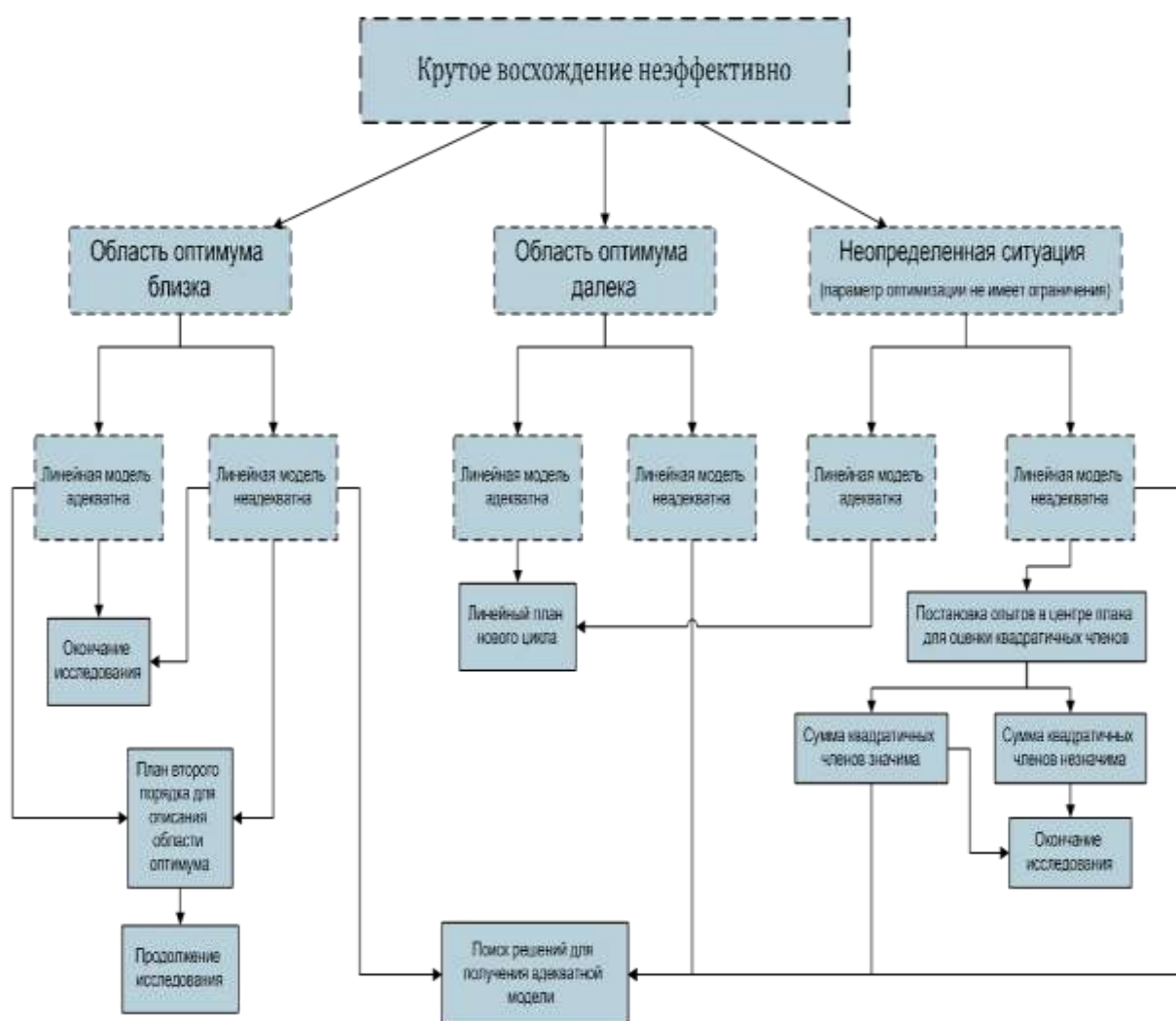


Рис. 9.5. Варианты возможных исходов крутого восхождения

*Крутое восхождение неэффективно. Область оптимума близка.* Если при реализации матрицы планирования удалось получить достаточно высокие значения параметра оптимизации и при крутом восхождении улучшить их не удалось, то наиболее типичными являются решения: 1) окончание исследования (выбирается лучший опыт); 2) построение плана второго порядка для описания оптимума.

Если линейная модель была неадекватна, то возможно третье решение – возврат к блок-схеме, чтобы выяснить причины неадекватности линейной модели.

*Крутое восхождение неэффективно.* Положение оптимума неопределенное. Если нет информации о положении оптимума и на стадии крутого восхождения не удалось улучшить значение параметра оптимизации, то можно рекомендовать поставить опыты в центре эксперимента с тем, чтобы оценить вклад квадратичных членов. При значимой сумме можно приступить к достройке линейного плана до плана второго порядка, так как наличие квадратичных членов свидетельствует о близости к почти стационарной области.

Обратим внимание на то, что при незначимой сумме обратного вывода делать нельзя, ибо возможен, например, такой случай:  $b_{11} = 5,7$ ,  $b_{22} = -5,3$ ,  $b_{11} + b_{22} = +0,4$ . Сумма незначима, так как коэффициенты имеют разные знаки.

Это случай, когда имеется два оптимума. Если же есть основание полагать, что оптимум один, то при незначимой сумме квадратичных членов можно приступить ко второму циклу крутого восхождения.

### 9.3. Эксперименты с симплекс-планированием

Одним из экспериментальных методов, применяемых в промышленных условиях, является симплекс-планирование.

Этот метод был предложен в 1962 году Спендлеем, Некстом и Химсвортом.

*Симплекс-планирование* – это последовательное шаговое движение к оптимуму поверхности отклика. Для метода характерно совме-

щение изучения поверхности отклика и перемещения по ней. Это достигается тем, что эксперименты ставятся только в точках факторного пространства, соответствующих вершинам симплекса.

Симплекс – это множество  $n+1$  независимых точек, образующих выпуклую фигуру в  $n$ -мерном пространстве  $n+1$  точками (вершинами).

Очевидно, что число вершин симплекса на единицу превосходит размерность факторного пространства, а координаты вершин симплекса являются значениями факторов в отдельных опытах, соединяемых прямыми отрезками, называемыми *ребрами*. Так, на плоскости симплексом является треугольник, в трехмерном пространстве – тетраэдр, на одномерной оси – отрезок прямой.

Симплекс называется *регулярным*, если все расстояния между его вершинами равны. На плоскости – это равносторонний (правильный) треугольник. Неправильный симплекс можно всегда преобразовать в регулярный путем кодирования факторов по обычным формулам.

В основе применения симплекса для целей оптимизации лежит следующее его важное свойство: из любого симплекса можно, отбросив одну из вершин и используя оставшуюся грань, получить новый симплекс, добавив всего лишь одну точку (рис. 9.6). Из симплекса 1, 2, 3, отбросив точку 1 и используя грань 2-3, получаем новый симплекс 2, 3, 4, построив точку 4.

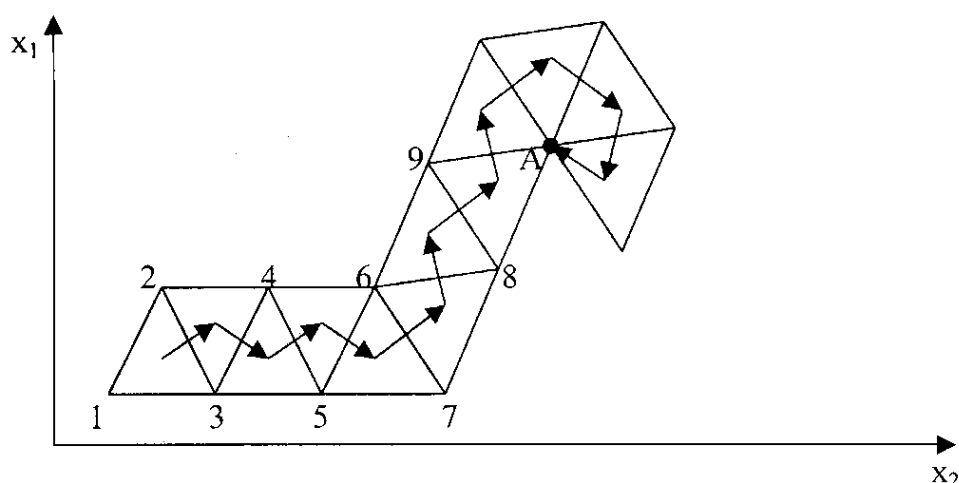


Рис. 9.6. Двумерный симплекс на плоскости

Поиск оптимума с помощью симплекс-планирования можно описать следующим алгоритмом:

1. Вычисляется симплекс (определяются координаты  $X_i$ ) и реализуются эксперименты (число экспериментов для  $n$ -мерного симплекса равно  $n+1$ ).

2. Отбрасывается точка плана с наименьшим значением выходного параметра.

3. Строится новый симплекс, образуемый остальными вершинами симплекса и новой вершиной, которую получают путем зеркального отражения отброшенной вершины относительно противоположной к ней грани начального симплекса. Координаты новой точки

$$X^k = \frac{R}{n} (X^1 + X^2 + \dots + X^{j-1} + X^{j+1} + \dots + X^{n+1}) - X^j, \quad (9.2)$$

где  $X^j$  – вектор координат  $j$ -й вершины;  $J$  – номер вершины выходного симплекса.

4. Проводится эксперимент в новой точке плана  $X^*$ .

5. Последовательно перемещается симплекс, в процессе чего на каждом шаге происходит отбрасывание вершины с наименьшим значением выходной переменной. На рис. 9.6 последовательно наихудшими вершинами являются 1, 2, 3.

6. Если при перемещении симплекса на протяжении  $n+1$  шагов одна из вершин сохраняет свое место, то симплекс делает оборот вокруг этой вершины. Это означает, что в данной точке находится оптимум (точка А на рис.9.6), что определяет конец процесса оптимизации.

7. Если выходная переменная в новой вершине симплекса выглядит хуже, чем в других вершинах, возвращаются к предыдущему симплексу и выбирают вершину, которую откинули и в которой выходная переменная имеет значение, следующее по порядку за наихудшей вершиной симплекса.

8. Если новая вершина выходит за пределы допустимой области планирования, то нужно провести такие действия, как в п.7.

9. При достижении оптимума размер симплекса уменьшают (примерно на  $\frac{1}{4}$ ).

10. Оптимум является достигнутым, если одна и та же точка входит в последовательные симплексы  $N$  раз, где  $N=1,65n+0.05n^2$ .

11. При присутствии дрейфа факторов необходимо в каждой точке делать несколько экспериментов и применять среднее значение выходной переменной.

После осуществления первой серии, состоящей из  $n+1$  опытов, точку, соответствующую самому плохому результату из всех  $n+1$  результатов, соединяют прямой с центром противоположной грани, на продолжении этой прямой находят точку, удаленную от центра грани на то же расстояние, что и худшая точка. Координаты этой точки определяют условия  $(n+2)$ -го опыта.

Согласно вышеописанной методике происходит приближение к вершине поверхности отклика (рис. 9.10).

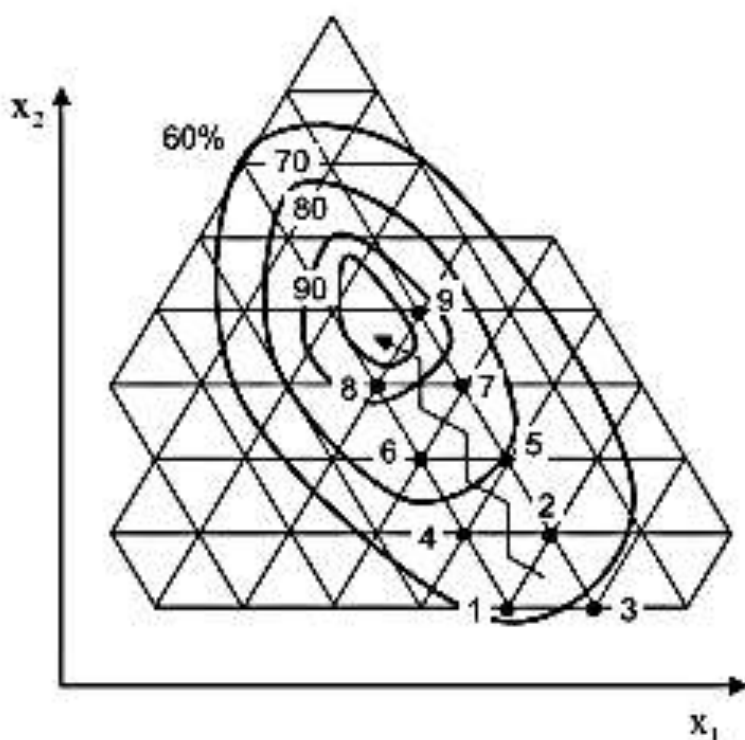


Рис. 9.10. Оптимизация процесса при симплексе-планировании исследования влияния на процесс двух факторов

Выбор размеров симплекса и его начального положения в известной степени произволен. Для построения начального симплекса значе-

ния в каждом опыте исходного симплекса определяются по формуле

$$x_{ij} = x_{i0} + C_{ij} \Delta x_i, \quad (9.3)$$

где  $x_{i0}$  – координаты центра начального симплекса;  $\Delta x_i$  – интервал варьирования  $i$ -го фактора;  $C_{ij}$  – кодированное значение  $i$ -го фактора для  $j$ -го опыта, выбираемое из числа матрицы для симплексного планирования (табл. 9.3).

Таблица 9.3

Коэффициенты  $C_{ij}$  для выбора координат симплекса\*

Номер опыта (j)	Факторы (i)					
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	...	X <sub>n-1</sub>	X <sub>n</sub>
1	n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	n <sub>3</sub>	...	n <sub>n-1</sub>	N <sub>n</sub>
2	-R <sub>1</sub>			...		N <sub>n</sub>
3		-R <sub>2</sub>		...		N <sub>n</sub>
4			-R <sub>3</sub>	...		N <sub>n</sub>
.....				...	...	N <sub>n</sub>
n	0	0	0	0	R <sub>n-1</sub>	N <sub>n</sub>
n+1	0	0	0	0	0	R <sub>n</sub>

$$*) n_i = \frac{1}{i+1} \sqrt{\frac{i+1}{2i}} = \sqrt{\frac{1}{2i(i+1)}}; R_i = \sqrt{\frac{1}{2(i+1)}}; i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.4)$$

где  $n$  – число факторов.

*Пример.* Составление симплекс-плана для двух факторов. Вначале ставят три опыта со следующими координатами:

$$1\text{-й опыт: } x_{11} = x_{10} + n_1 \Delta x_1; x_{21} = x_{20} + n_2 \Delta x_2; \quad (9.5)$$

$$2\text{-й опыт: } x_{12} = x_{10} + R_1 \Delta x_1; x_{22} = x_{20} + n_2 \Delta x_2; \quad (9.6)$$

$$3\text{-й опыт: } x_{13} = x_{10} + 0; x_{23} = x_{20} + R_2 \Delta x_2. \quad (9.7)$$

Симплекс, рассчитанный по формулам (9.5)–(9.7), представлен на рис. 9.11.

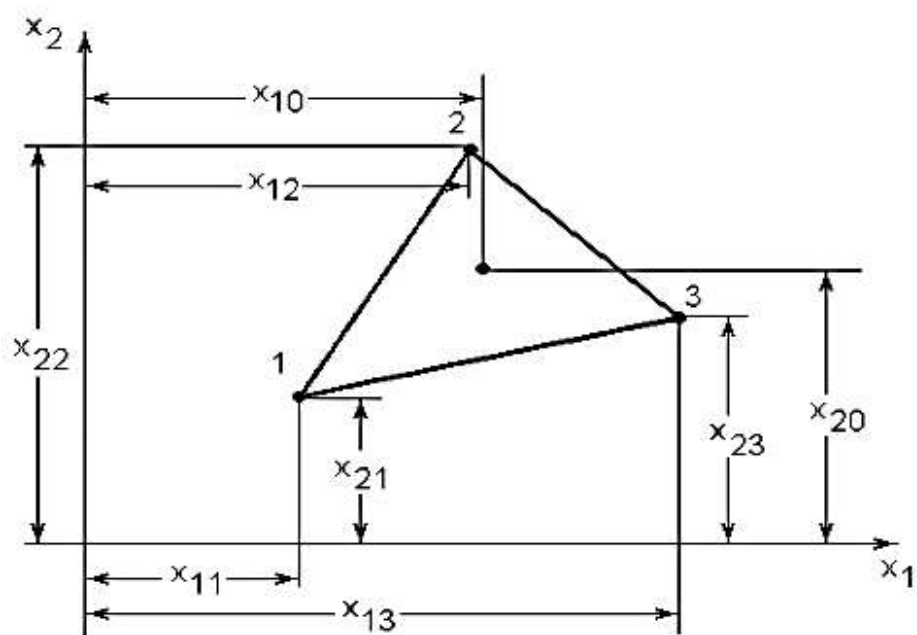


Рис. 9.11. Схема построения начального симплекса

Так, если  $x_{10} = 0$  и  $x_{20} = 0$ , а  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$ , то координаты опытов будут равны (рис. 9.12): опыт 1 (0,5; 0,289), опыт 2 (-0,5; 0,289) и опыт 3 (0; -0,577), что соответствует координатам вершин равностороннего треугольника с длиной стороны, равной 1. Начало координат в этом случае находится в точке пересечения медиан (биссектрис).

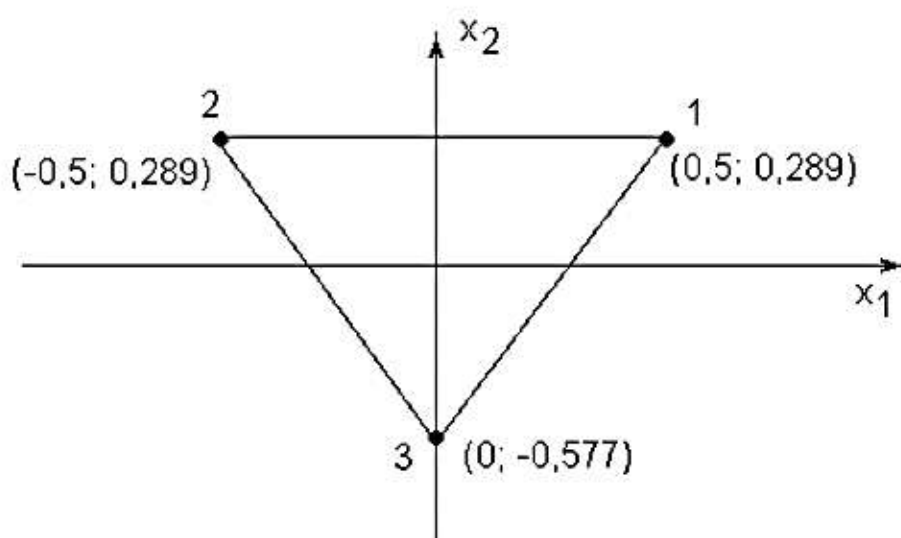


Рис. 9.12. Координаты вершин симплекса  
при  $x_{i0} = 0$ ,  $\Delta x_i = 1$ ,  $n = 2$

Для определения условий проведения опыта в отраженной точке (координат новой вершины симплекса) используется формула

$$x_{in} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} - x_{i3}, j \neq i, \quad (9.8)$$

где  $x_{in}$  – координата новой точки (новой вершины) симплекса для  $i$ -й переменной;  $x_{i3}$  – координата заменяемой точки (координата вершины симплекса из наихудших откликов перед ее отбрасыванием);  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij}$  – среднее значение из координат всех вершин, кроме заменяемой.

Известны следующие критерии окончания процесса последовательного отражения наихудших вершин и постановки очередных опытов в новых вершинах:

1. Разность значений функции отклика в вершинах симплекса становится меньше ранее заданной величины. Это означает либо выход в «почти стационарную» область вблизи оптимума, либо достижение участка поверхности  $\bar{y} = f(x_1; \dots; x_n) = \text{const}$  в виде «плато». В этом случае дополнительными опытами в стороне от симплекса следует удостовериться в отсутствии других участков с более существенной кривизной поверхности  $\bar{y} = f(x_1; \dots; x_n)$  и принять величину с экспериментальным значением функции отклика за точку оптимума.

2. Отражение любой из вершин симплекса после однократного качания приводит к его возврату в прежнее положение. При этом есть основания утверждать «накрытие» симплексом точки оптимума.

3. Циклическое движение симплекса вокруг одной из вершин на протяжении более чем несколько шагов. Подобная ситуация имеет место, когда искомый оптимум располагается внутри области, охватываемой циркулирующим симплексом.

В случае 2 и 3 рекомендуется уменьшить размеры симплекса, т.е. расстояние между вершинами, и продолжать поиск до желаемого уточнения координат искомого оптимума.

В симплекс-планировании размещение опытов эксперимента осуществляется в вершинах регулярного (правильного) симплекса.



Процедура построения матрицы симплекс-плана может быть пояснена на примере двух независимых переменных. Равносторонний треугольник в плоскости кодированных переменных  $x_1$  и  $x_2$  можно расположить так, чтобы для вектор-столбцов, элементами которых являются координаты вершин, выполнялись условия симметричности и ортогональности:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -a & b \\ 0 & -2b \end{bmatrix}.$$

Значения  $a$  и  $b$  могут быть вычислены из условия нормировки  $\sum_{i=1}^N x_{i1}^2 = \sum_{i=1}^N x_{i2}^2 = N$ , при котором оценки коэффициентов  $b_j$  линейной модели будут иметь одинаковые дисперсии. С учетом этого условия для столбцов матрицы получим  $2a^2 = 6b^2 = 3$  и, следовательно, матрицу независимых переменных  $x_1, x_2$ :

$$\begin{bmatrix} 1,288 & 0,707 \\ -1,288 & 0,707 \\ 0 & -1,414 \end{bmatrix}.$$

Для удобства следует провести масштабирование элементов матрицы, с тем чтобы получить правильный симплекс, вписанный в окружность единичного радиуса. После деления всех элементов на 1,414 получим матрицу симплекс-планирования (табл. 9.4).

Таблица 9.4

Матрица симплекс-планирования  
для двух факторов

Номер опыта	Матрица симплекс-плана			Выход $y_i$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	
1	+1	+0,866	0,500	$y_1$
2	+1	-0,866	0,500	$y_2$
3	+1	0	-1,000	$y_3$

Геометрическая интерпретация симплекса показана на рис. 9.13.

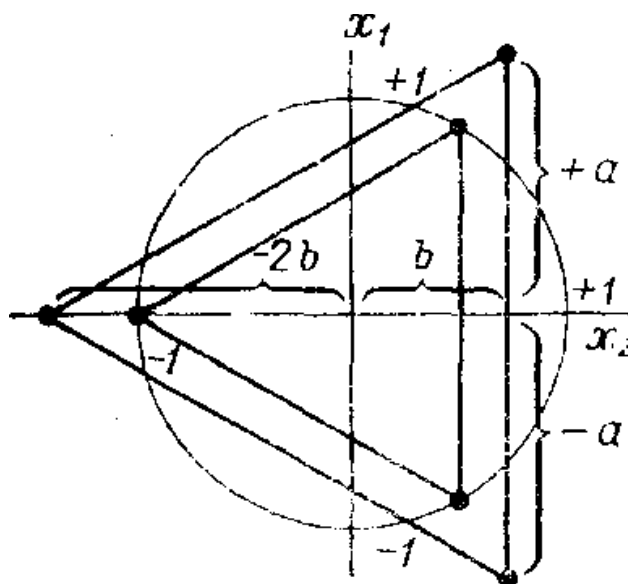


Рис. 9.13. Регулярный симплекс

Для четырех переменных исходная матрица симплекса будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & -2a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & -3a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & -4a_4 \end{bmatrix}.$$

Из условия нормировки получим  $2a_1^2 = 6a_2^2 = 12a_3^2 = 20a_4^2 = 5$ , откуда  $a_1=1,580$ ,  $a_2=0,912$ ,  $a_3=0,644$ ,  $a_4=0,500$ .

Определив значения  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  после масштабирования, делением всех элементов на 2,00 получим матрицу планирования (табл. 9.5).

Таблица 9.5

Матрица симплекс-планирования  
для четырех факторов

Номер опыта	Матрица симплекс-плана					Выход $y_i$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
1	+1	0,790	0,456	0,322	0,250	$y_1$
2	+1	-0,790	0,456	0,322	0,250	$y_2$
3	+1	0	-0,912	0,322	0,250	$y_3$
4	+1	0	0	-0,966	0,250	$y_4$
5	+1	0	0	0	-1,000	$y_5$

Матрица центрированного К-симплекса, вписанного в сферу единичного радиуса, может быть записана в общем виде:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & -2a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & -3a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -na_n \end{bmatrix},$$

где

$$a_i = \sqrt{\frac{n+1}{in(i+1)}}, \quad i \leq n. \quad (9.9)$$

В табл. 9.6 приводятся численные значения в зависимости от  $i$  и  $k$ .

Таблица 9.6

Численные значения в зависимости от  $i$  и  $n$ .

$n \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	0,8660	1						
3	0,8165	0,9482	1					
4	0,7906	0,9129	0,9682	1				
5	0,7746	0,8944	0,9487	0,9798	1			
6	0,7638	0,8819	0,9354	0,9661	0,9897	1		
7	0,7559	0,8729	0,9258	0,9562	0,9759	0,9897	1	
8	0,7500	0,8660	0,9186	0,9487	0,9682	0,9820	0,9922	1

В силу свойств ортогональности, симметричности и нормировки матрицы симплекс-плана вычисление коэффициентов линейной регрессионной модели, анализ ее пригодности для описания результатов эксперимента производятся по аналогии с ПФЭ.

Дисперсии оценок коэффициентов в симплекс-планах и планах  $2^n$  одинаковы и определяются как  $\sigma^2 \{b_j\} = \sigma^2 \{y\} / \sum_{i=1}^N x_{ij}^2 = \sigma^2 \{y\} / N$ .

Вместе с тем симплекс–планы имеют большую дисперсию предсказания значений зависимой переменной  $y$ . Так, например, для линейной модели плана  $2^{4-1}$

$$y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4 \quad (9.10)$$

дисперсия предсказания значений  $\hat{y}$  равна:

$$\sigma^2\{\hat{y}\}=\sigma^2\{b_0\}+x_1^2\sigma^2\{b_1\}+x_2^2\sigma^2\{b_2\}+x_3^2\sigma^2\{b_3\}+x_4^2\sigma^2\{b_4\}. \quad (9.11)$$

Если принять  $\sigma^2\{y\}=1$ , то  $\sigma^2\{b_i\}=1/8$  и

$$\sigma^2\{\hat{y}\}=0,125(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2). \quad (9.12)$$

Дисперсия предсказания может быть вычислена для линейной модели, получаемой при реализации симплекс–плана для 4–факторной модели. С учетом примененного масштабного уменьшения в два раза всех элементов матрицы симплекс–плана линейную модель следует записывать в виде

$$y=b_0+2b_1x_1+2b_2x_2+2b_3x_3+2b_4x_4. \quad (9.13)$$

Дисперсию предсказания  $\sigma^2\{\hat{y}\}$  найдем из уравнения

$$\sigma^2\{\hat{y}\}=\sigma^2\{b_0\}+4x_1^2\sigma^2\{b_1\}+4x_2^2\sigma^2\{b_2\}+4x_3^2\sigma^2\{b_3\}+4x_4^2\sigma^2\{b_4\}. \quad (9.14)$$

Если  $\sigma^2\{y\}=1$ , то в случае симплекс–плана  $\sigma^2\{b_i\}=1/5$ , а

$$\sigma^2\{\hat{y}\}=0,200(1+4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_4^2). \quad (9.15)$$

Максимальные значения  $\sigma^2\{\hat{y}\}$  достигаются на границе области эксперимента. Сравнение этих значений дисперсии предсказания для двух типов планов при линейной модели и минимальном числе опытов приведено в табл.9.7.

Таблица 9.7

Сравнение значений дисперсии предсказания для двух типов планов при линейной модели и минимальном числе опытов

Тип планов	$\sigma^2\{\hat{y}\}$ при числе входных переменных			
	2	4	5	6
Планы $2^{k-p}$	0,75	0,62	0,75	0,87
Симплекс–планы	1,67	3,40	4,33	5,28

Наибольший интерес представляет применение симплекс-планов в задачах оптимизации объектов. На основе правильных симплексов

может быть построена достаточно формализованная процедура движения к экстремуму.

Симплекс-процедура движения состоит из следующих повторяющихся этапов:

- 1) реализация опытов в соответствии с выбранной матрицей симплекс-плана;
- 2) отбрасывание вершины симплекса с минимальным значением выходной переменной (параметра оптимизации);
- 3) построение на оставшейся грани нового симплекса, у которого отброшенная вершина заменена ее зеркальным отображением.

В связи с тем, что в такой процедуре не требуется вычисления и оценивания коэффициентов линейной модели, выбор правильного симплекса можно делать без учета свойств ортогональности, нормировки. Очень часто, особенно в условиях промышленного эксперимента, возникает необходимость выбора такого вписанного симплекса, который имеет минимальное число дробных уровней варьирования.

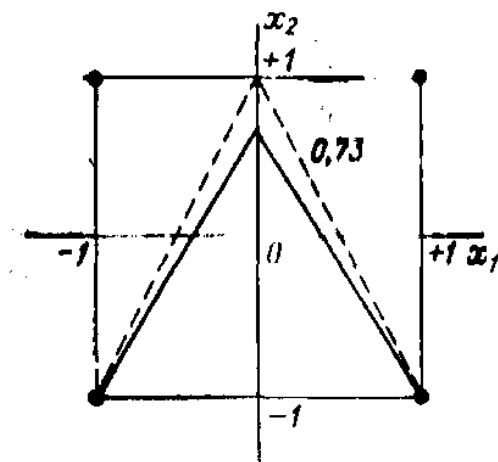


Рис.9.14. Правильный симплекс вписан в квадрат

Например, в выбранном квадрате факторного пространства для кодированных переменных правильный симплекс может быть вписан в квадрат, как показано на рис. 9.14.

Матрица такого симплекса имеет следующий вид:

№ опыта	$x_1$	$x_2$
1	-1	-1
2	+1	-1
3	0	+0,73

Для трех переменных симплекс совпадает с планом  $2^{4-1}$ :

№ опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1

и матрица не имеет дробных уровней.

В общем виде почти целочисленная матрица правильного  $k$ -симплекс-плана может быть записана в виде:

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & \dots & +1 \\ +1 & -1 & +1 & \dots & +1 \\ +1 & +1 & -1 & \dots & +1 \\ +1 & +1 & +1 & \dots & +1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ +1 & +1 & +1 & \dots & -1 \\ \delta_k & \delta_k & \delta_k & \dots & \delta_k \end{bmatrix},$$

где  $\delta_k = 1 - \frac{2}{k}(\sqrt{k+1} + 1)$ .

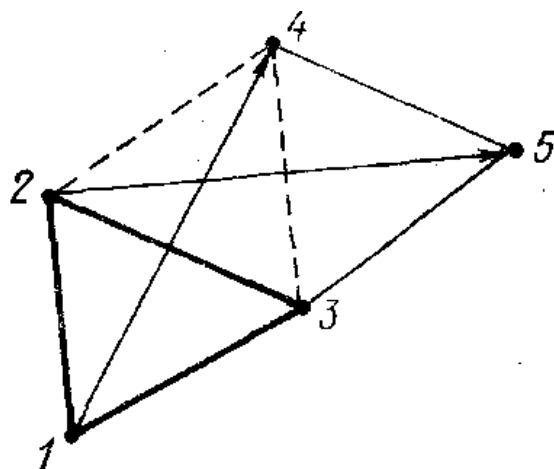


Рис. 9.15. Симплекс-планы

Приведенные симплекс-планы записаны в кодированных переменных. Чтобы перейти от кодированных значений  $x_j$  к натуральным  $X_j$ , следует воспользоваться известным преобразованием.

Движение в пространстве входных переменных, например в направлении максимума функции отклика, происходит путем зеркального отображения вершины  $\bar{X}_1$  симплекса с наименьшим значением

$y(\bar{X}_1)$  и построения нового симплекса, как показано на рис. 9.15.

Координаты новой вершины симплекса определяются из равенств:

$$x_{ij}^* = \frac{2}{k} (x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + \dots + x_{k+1,j}) - x_{ij}, \quad (9.16)$$

где  $x_{ij}^*$  –  $j$ -я координата новой  $i$ -й вершины;  $j=1, 2, \dots, k$  – число входных переменных;  $i=1, 2, \dots, N$  – число вершин симплекса.  $N=k+1$ .

Формула справедлива и для натуральных значений координат вершин симплекса.

Пусть при реализации матрицы симплекс–плана для  $k=4$  в третьем опыте получено минимальное значение  $y_3$ . При движении к максимуму производится зеркальное отражение третьей вершины.

Координаты новой вершины вычисляются по формуле

$$x_{31}^* = 2/4(x_{11} + x_{21} + x_{41} + x_{51}) - x_{31} = 2/4(-1 + 1 + 1 - 0,618) - 1;$$

$$x_{32}^* = 2/4(x_{12} + x_{22} + x_{42} + x_{52}) - x_{32} = 2/4(+1 - 1 + 1 - 0,618) - 1;$$

$$x_{33}^* = 2/4(x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53}) - x_{33} = 2/4(+1 + 1 + 1 - 0,618) + 1;$$

$$x_{34}^* = 2/4(x_{14} + x_{24} + x_{44} + x_{54}) - x_{34} = 2/4(+1 + 1 - 1 - 0,618) - 1.$$

При реализации симплекс–процедуры движения могут возникать трудности, связанные с ошибками эксперимента, ограничениями на входные переменные, особенностями рельефа поверхности отклика. Эти обстоятельства заставляют использовать ряд дополнительных правил.

1. При вращении системы симплексов вокруг одной вершины («зацикливание» симплекса) после  $k+1$  опыта прекращают отражение и повторяют опыт в данной вершине. Эта ситуация, показанная на рис. 9.16, может расцениваться как достигнутая близость экстремума, в этом случае следует перейти к планированию второго порядка, либо может быть выявлена ошибка в ранее полученном результате.

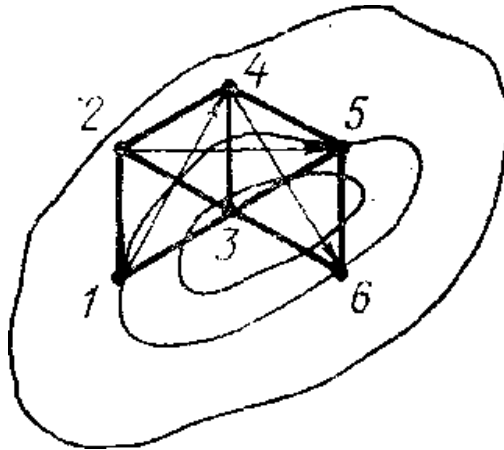


Рис. 9.16. «Защикливание» симплекса

2. Значение отклика в новой вершине при кантовании симплекса наименьшее. В этой ситуации следует вернуться к исходному симплексу, отражая вторую наименьшую вершину.

Симплекс-планирование является достаточно эффективным средством достижения областей экстремума. Отметим достоинства и недостатки последовательного симплексного метода.

Достоинства:

- используется минимальное число опытов для определения направления движения по сравнению с другими планами. Введение нового фактора требует постановки только одного дополнительного опыта;
- метод обладает простой вычислительной процедурой;
- достаточно легко учитываются ограничения на область изменения переменных;
- процедура метода позволяет легко включать или исключать из рассмотрения те или иные переменные;
- направление движения определяется только соотношением величин функции отклика в вершинах симплекса, а не их абсолютными значениями;
- метод работоспособен в условиях дрейфа характеристик объекта.

Недостатки:

- реализация метода не дает информации о влиянии каждой переменной на функцию отклика;
- движение по правилам симплексного метода дает ограниченное представление о рельефе поверхности отклика.



## Литература

1. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента / Ю.П. Адлер. – М.: Металлургия, 1969.
2. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
3. Блохин А.В. Теория эксперимента: курс лекций. В 2 ч. Ч. 2 / А.В. Блохин. – Минск: Научно-методический центр «Электронная книга БГУ», 2003. [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: <http://anubis.bsu.by/publications/elresources/Chemistry/blohin2.pdf>.
4. Блохин А.В. Теория эксперимента: курс лекций. В 2 ч. Ч. 1 / А.В. Блохин. – Минск: Научно-методический центр “Электронная книга БГУ”, 2003. [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: <http://anubis.bsu.by/publications/elresources/Chemistry/blohin1.pdf>.
5. Бояршинова А.К. Теория инженерного эксперимента: текст лекций / А.К. Бояршинова, А.С. Фишер. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2006. – 85 с.
6. Будник А.В. Планирование измерительного эксперимента и обработка результатов измерений: учеб. пособие / А.В. Будник, В.Е. Галузо, К.В. Андрухович. – Минск: БГУИР, 2003. – 48 с.
7. Вознесенский В.А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях / В.А. Вознесенский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 264 с.
8. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах: учеб. для вузов / Под ред. А.В. Петрова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1984. – 180 с.
9. Гришенцев А.Ю. Теория и практика технического и технологического эксперимента: учеб. пособие / А.Ю. Гришенцев. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. – 102 с.

10. Димитров В.П. Введение в теорию принятия решений: учеб. пособие / В.П. Димитров, Л.В. Борисова. – Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2013.

11. Димитров В.П.. Введение в системный анализ: учеб. пособие / В.П. Димитров, Л.В. Борисов, Б.Б. Жмайлов. – Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2013.

12. Зубрилина Е.М. Обоснование параметров пневматического аппарата для одновременного высева семян кукурузы и сорго : дис. ... канд. тех. наук. – зерноград, 2002. – 125 с.

13. Зубрилина Е.М. Управление качеством процесса высева семян пропашных культур пневматическим высевающим аппаратом с системой контроля / Е.М. Зубрилина // Качество продукции: контроль, повышение, планирование: сб. ст. междунар. молодежн. науч.-практ. конф. – Курск, 2014. – С. 199-202. [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: <http://elibrary.ru/item.asp?id=22865377>

14. Зубрилина Е.М. Устройство для автоматизированного определения коэффициентов трения семян / Е.М. Зубрилина, И.А. Маркво, А.А. Минеев, П.П. Павлов // Состояние и перспективы развития сельскохозяйственного машиностроения: сб. ст. 10-й междунар. науч.-практ. конф. в рамках 20-й междунар. агропром. выст. «Интерагромаш-2017». – Ростов-на-Дону, 2017. – С. 155-156.

15. Использование метода композиционного планирования эксперимента для описания технологических процессов: метод. указания / Сост. А.Н. Гайдадин, С.А. Ефремова; ВолгГТУ. – Волгоград, 2008. – 16 с.

16. Крагельский И.В. Основы расчетов на трение и износ / И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов. – М.: Машиностроение, 1977. – 526 с.

17. Кулаев Е.В. Параметры и режимы работы механического аппарата точного высева семян сахарной свеклы : дис. ... канд. тех. наук. – Нальчик, 2006. – С. 22.

18. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул / Е.Н. Львовский. – М.: Высш. шк., 1982. – 240 с.

19. Любченко Е.А. Планирование и организация эксперимента: учеб. пособие. Ч. 1 / Е.А. Любченко, О.А. Чуднова. – Владивосток: Изд-во ТГЭУ, 2010. – 156 с.

20. Макаричев Ю.А. Методы планирования эксперимента и обработки данных: учеб. пособие / Ю.А. Макаричев, Ю.Н. Иванников. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016. – 131 с..

21. Математическая статистика: учеб. / В.М. Иванова, В.Н. Калинина, Л.А. Нешумова и др. – М.: Высш. шк., 1981. – 371 с.

22. Мельников С.В. Механизация и автоматизация животноводческих ферм / С.В. Мельников. – М.: Колос, 1978. – 280 с.

23. Мельников С.В. Планирование эксперимента в исследованиях сельскохозяйственных процессов / С.В. Мельников, В.Р. Алешкин, М. Рощин – М.: Колос, 1972. – 200 с.

24. Методы планирования и обработки результатов инженерного эксперимента: конспект лекций (отдельные главы из учебников для вузов) / Н.А. Спирин, В.В. Лавров; под общ. ред. Н.А. Спирина. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2004. – 257 с.

25. Мухачёв В.А. Планирование и обработка результатов эксперимента: учеб. пособие / В.А. Мухачёв / Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – Томск, 2007. – 118 с.

26. Налимов В.В. Применение математической статистики при анализе вещества / В.В. Налимов. – М.: Физматгиз, 1960. – 430 с.

27. Основы надежности машин / Е.М. Зубрилина, Ю.И. Жевора, А.Т. Лебедев и др. – Ставрополь: АГРУС, 2010. – 120 с.

28. Пат. № 175130 RU МПК 7А01 С7/04 . Пневматический высевающий аппарат / Е.М. Зубрилина, И.А. Маркво, М.А. Набокина, А.В. Каргина, М.Г. Бородаева, патентообладатель И.А. Маркво, № 2016141247/13 ; заявл. 19.10.2016; опубл. 22.11.2017 Бюл. №33.

29. Петровский А.Б. Теория принятия решений: учеб. / А.Б. Петровский. – М.: ИД «Академия», 2009.

30. Реброва И.А. Планирование эксперимента: учеб. пособие / И.А. Реброва. – Омск: СибАДИ, 2010. – 105 с.

31. Сидняев Н.И. Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных: учеб. пособие для магистров / Н.И. Сидняев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство «Юрайт», 2017. – 495 с.

32. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента / В.В. Федоров. – М.: Наука, 1971. – 312 с.

33. Чикильдин В.Н. Совершенствование процесса высева семян пропашных культур пневматической сеялкой (на примере кукурузы): дис. ... канд. тех. наук. – Ставрополь, 2011. – 154 с.

Учебно-методическое пособие

**Зубрилина** Елена Михайловна  
**Димитров** Валерий Петрович

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

---

Подписано в печать \_\_\_\_\_ 2021.

Формат 60×84/16. Объем 10,8 усл. п.л.

Тираж 100 экз. Заказ № 145

---

ООО «ДГТУ-ПРИНТ»

Адрес полиграфического предприятия:  
344000, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1